EL TEOREMA DE HOLONOMÍA DE BERGER

JOHANN JEIVER SUÁREZ MOTATO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2011

EL TEOREMA DE HOLONOMÍA DE BERGER

JOHANN JEIVER SUÁREZ MOTATO

Director
Oscar Andrés Montaño, M.Sc.
Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS

JOHANN JEIVER SUÁREZ MOTATO, 1980

TEOREMA DE HOLONOMÍA DE BERGER

Temas:

Variedades Riemannianas
Grupos de Lie
Transporte Paralelo
Grupo de Holonomía
Teorema de descomposición de De Rham

SANTIAGO DE CALI
2011

Índice general

Resumen

En la geometría diferencial, la holonomía de una conexión sobre una variedad riemanniana dada es una característica que permite conocer algunas cualidades tanto algebráicas como geométricas de dicha variedad. El Teorema de holonomía de Berger y su demostración es el objeto principal de este trabajo, en él se clasifica una variedad riemanniana irreducible como localmente simétrica, a partir de las propiedades algebraicas de su (grupo de) holonomía.

Introducción

El estudio de la holonomía (riemanniana o el grupo de holonomía) ha permitido numerosos desarrollos de gran importancia en la geometría riemanniana desde el punto de vista algebraico. La holonomía fue introducida por Cartan en 1926 para estudiar y clasificar los espacios simétricos, Cartan encontró que la holonomía de una conexión puede ser identificada mediante un grupo de Lie, llamado *el grupo de holonomía*, (este resultado también es llamado *principio de holonomía* [12]).
El trabajo de Cartan lo continuó Georges De Rham en 1952, quien enunció el Teorema de Descomposición que lleva su nombre y que permitió clasificar como *irreducible* una variedad riemanniana a partir de su grupo de holonomía. Mas tarde, fue Marcel Berger quien contribuyó al desarrollo del estudio de la holonomía con la clasificación de las posibles holonomías irreducibles y que posteriormente le permitió enunciar uno de los resultados generales y avanzados más importantes de la geometría riemanniana, el denominado *Teorema de holonomía de Berger* [1].
Su importancia radica en el hecho de que este teorema permite saber cuáles son los objetos geométricos paralelos en una variedad, a partir de cuáles son los objetos algebraicos, en el espacio tangente en un punto, que son invariantes por la *holonomía*.
La holonomía juega un rol importante en la geometría riemanniana desde el punto de vista de aplicaciones ya que muchas de las propiedades de una variedad riemanniana M se pueden leer de su holonomía. Las dos más importantes son:

1. **Teorema de De Rham**: *Sea M una variedad riemanniana, si existe un subespacio propio de T_pM que es invariante (por izquierda) bajo la acción del grupo de holonomía, entonces M es localmente un producto de variedades riemannianas*[2].

2. **Teorema de holonomía de Berger-Simons**: *Sea M una variedad riemanniana localmente irreducible. Si el grupo de holonomía $Hol(M)$ de M actúa transitivamente sobre la esfera (del tangente) entonces M es localmente simétrica* [10].

El Teorema de De Rham da información de cuándo una variedad es localmente un producto cartesiano, a partir de su grupo de holonomía. El teorema central en este trabajo es el Teorema de holonomía de Berger (o Teorema de Berger-Simons) que es una aplicación del llamado *teorema de holonomía normal* [11].
En la demostración de este teorema, Berger utilizó la clasificación de representaciones irreducibles de grupos compactos. Años más tarde, James Simons [14] desarrolló una prueba puramente algebraica de este hecho que elude la clasificación dada por Berger,

pero es muy técnica e intrincada.
En este trabajo se hace una recopilación monográfica de la demostración hecha por Carlos Olmos en el 2005 (consultar [10]), quien propone una prueba desde un punto de vista algebraico pero sin desligarse del componente geométrico vinculando la holonomía riemanniana con la holonomía normal.

La forma como se desarrolla este trabajo es la siguiente:

En el capítulo 1, asumiendo un conocimiento general sobre la geometría diferencial, se presentan una recopilación de los resultados y definiciones principales que estarán relacionados o referenciados en los capitulos posteriores, con el fin de unificar la notación. Así, al definir la derivada de un campo vectorial sobre una variedad riemanniana, aparecen las nociones de conexión y de tensor de curvatura. Estos conceptos, permiten definir un nuevo tensor que permitirá derivar campos normales a través de una derivada covariante definida en el espacio normal a una variedad, llamado el *tensor de curvatura normal*. Finalmente, se enuncian una serie de proposiciones que describen propiedades algebraicas del tensor de curvatura normal y la derivada covariante normal y que se conocen con los nombres de *ecuaciones fundamentales para subvariedades*.

El capítulo 2 comienza con la definición de grupo de Lie presentando los ejemplos clásicos de ellos. Con las traslaciones a izquierda y derecha definidas en un grupo de Lie aparece la noción de álgebra de Lie. Los grupos de tranformaciones permiten el estudio de una variedad desde el punto de vista algebraico, se tiene entonces los conceptos de acción de un grupo sobre una variedad, la órbita de un punto p perteneciente a una variedad M y el grupo de isotropía alrededor de un punto de una variedad. También se trabajan algunos resultados de los espacios simétricos y se define el concepto de geodésicas y subvariedades totalmente geodésicas presentando el Teorema de Cartan sobre la existencia de ellas. Finalmente, aparece el denominado transporte paralelo a través de curvas que luego, permite dar las definiciones principales en este capítulo como lo son, el *grupo de holonomía* y el *grupo de holonomía normal*.

En el capítulo 3 se enuncian y demuestran resultados intermedios que permiten trabajar en detalle la demostración del Teorema de Berger. El capítulo también presenta, sin demostración, resultados recientes sobre el estudio de holonomía. Comienza con la definición de variedad reducible que permite enunciar el Teorema de De Rham. A partir de una propiedad local de una variedad, se muestra la relación existente entre el Teorema de holonomía normal y Teorema algebraico de Berger-Rham. Teniendo presente estos resultados, se enuncian los lemas y proposiciones (algunas con demostración) que fueron utilizados por Olmos en la demostración sencilla pero eficaz del Teorema de Berger-Simons, donde utiliza argumentos tanto geométricos como algebraicos simplificando la complejidad de las pruebas dadas por Berger (solo con conceptos geométricos) y posteriormente por Simons (prueba puramente algebraica) [1].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene como objetivo presentar la notación que será utilizada a lo largo del trabajo y algunos resultados importantes ya conocidos de la geometría riemanniana. Los teoremas y definiciones que aparecen en este capítulo se pueden encontrar de forma más detallada y con sus respectivas demostraciones en [3] y [5].

1.1. Resultados Básicos

En esta sección, se presentaran algunas nociones básicas sobre variedades diferenciales y se enunciarán (sin demostración) los resultados generales más relevantes, que posteriormente podrán ser utilizados en el desarrollo del trabajo.

Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Es conocido que el conjunto de funciones diferenciables de M en $\mathbb{R}$ forma un álgebra que será denotada por $C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Si $p \in M$ y f está definida alrededor de p, entonces

$$C^\infty(M, p) = \{f : M \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es diferenciable en } p \in M \text{ y } p \in \text{Dom } f\}.$$

Cuando no sea necesario hacer referencia al punto p, solo se escribirá $C^\infty(M)$.

Definición 1.1 *Sea M una variedad diferenciable. Una **curva** sobre M es una aplicación diferenciable $c : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ denotada por $c(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.*
*Sea $c(0) = p \in M$. El **vector tangente** a la curva $c(t)$ en $t = 0$ es una función $c'(0) = v : C^\infty(M, p) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$c'(0)f = vf = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0}$$

Un vector tangente en p es un vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $c(t)$ sobre M con $c(0) = p$ [5].

Definición 1.2 *Sea M una variedad diferenciable y p un punto en M. El* ***espacio tangente*** *a M en p, denotado por T_pM, se define como el conjunto de todas las aplicaciones $X_p : C^\infty(M,p) \to \mathbb{R}$ que satisfacen para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(M,p)$ las siguientes condiciones:*

1. $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$.
2. $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$.

Más aún, T_pM con las operaciones definidas por:

1. $(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f$
2. $(\alpha X_p)f = \alpha(X_p f)$

forma un espacio vectorial que se llama ***espacio vectorial tangente*** *a M en p [3].*

Ejemplo 1.1 *Es fácil ver que si $M = \mathbb{R}^n$, entonces $T_pM \cong \mathbb{R}^n$. De la misma manera, si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $M = U$ entonces, $T_pM \cong \mathbb{R}^n$.*

Note que el operador X_p, es también un vector tangente a M en p que cumple que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$ y de esta forma, al operador X_p se le puede asociar el par (p, v). Así que un vector v tangente a M en p es cualquier $X_p \in T_pM$.

Definición 1.3 *Un* ***campo vectorial*** *X sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia un vector X_p a cada punto $p \in M$. Si $f \in C^\infty(M)$, entonces Xf es una función definida sobre M por $(Xf)(p) = X_p f$. Un campo vectorial X es* ***diferenciable*** *si Xf es diferenciable para cada $f \in C^\infty(M)$ [5].*

Definición 1.4 *Un campo vectorial $X(t)$ a lo largo de una curva $c(t)$ sobre M es una aplicación diferenciable que asocia a cada $t \in I$ un vector tangente $X(t) \in T_{c(t)}M$ [5].*

Proposición 1.1 *Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ una función diferenciable. Dados un punto $p \in M$ y $c(t)$ una curva sobre M tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$, entonces la aplicación $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ definida como*

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0}$$

es una aplicación lineal que no depende de la curva $c(t)$.

Demostración: Puede consultar [5] en la página 9.

Observación 1.1: La aplicación lineal df_p dada en la proposición anterior se conoce como **la diferencial** de f en p. Entonces, de la definición 1.2, $df_p(X) = X_p f$.
Una forma de tener todos los espacios tangentes, es considerar el *haz tangente*.

Definición 1.5 *Sea M una variedad diferenciable y $E = \bigcup_{p \in M} T_pM$ (la unión de planos tangentes a M). Al particionar el producto cartesiano $M \times E$ en subconjuntos de la forma $\{p\} \times T_pM$ y luego tomar su unión, se obtiene el nuevo conjunto*

$$TM = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_pM)$$

*llamado el **haz (o fibrado) tangente** de M [15].*

Observación 1.2

1. Note que la aplicación X_p de la definición 1.2 también se puede ver como una aplicación de M en el haz tangente TM, puesto que X_p es un par (p, v) donde $p = c(0)$ y $v = c'(0)$ para alguna curva $c(t)$ sobre M y el haz tangente $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$.

2. Una forma de almacenar información sobre TM es considerando la aplicación $\pi : TM \to M$ definida por $\pi(p, v) = p$ (donde $p = c(0)$ y $v = c'(0)$ es el vector velocidad de alguna curva $c(t)$ sobre M) resulta ser diferenciable (ver [15]) y se le llama **proyección canónica**.

3. En el lenguaje de la teoría general de los fibrados, se dice que M es la *base*, $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_pM$ es la *fibra* sobre p y que π es la proyección del fibrado sobre su base. Por abuso del lenguaje, se suele decir que la fibra sobre p es $\pi^{-1}(p) = T_pM$ siempre que no haya confusión sobre el punto al que se refiere [15].

El conjunto de campos vectoriales de clase C^∞ sobre una variedad diferenciable M se denotará por $\mathfrak{X}(M)$.

Observación 1.3: $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura de un *álgebra* sobre $\mathbb{R}$ porque satisface que:

1. $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2. Si $f, g \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces, $\quad (fX)(g) = f(Xg)$

Además que si $p \in M$, se escribirá $(fX)_p(g) = f(p)X_pg$.
La demostración de este resultado se puede encontrar en [3], pág. 38.

Definición 1.6 *Sean M una variedad diferenciable y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales tangentes a M. El campo vectorial tangente definido como el operador lineal $[,]_p$ que aplica la función $f \in C^\infty(M)$ en la función:*

$$[X, Y]_pf = X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [XY - YX]_pf$$

*se denomina **corchete de Lie**, **bracket de Lie** o simplemente **bracket** [5].*

Definición 1.7 *Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ una función diferenciable. Se dice que f es una* ***inmersión****, si para todo $p \in M$ se tiene que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una transformación lineal inyectiva. Además si f es una inmersión y $f : M \to f(M) \subset N$ es un homeomorfismo, a f se le llama un* ***encaje*** *(donde la topología en $f(M)$ es la topología inducida por N)* [5].

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos, una aplicación $f : A \to B$ se denomina un **difeomorfismo**, si f es un homeomorfismo y tanto f como f^{-1} son de clase C^r $(r > 1)$ [3].

Definición 1.8 *Sean M y $\overline{M}$ variedades diferenciables. Si $M \subset \overline{M}$ y la función inclusión $i : M \to \overline{M}$ es un encaje, se dice que M es una* ***subvariedad*** *de $\overline{M}$* [5].

Observación 1.4: Si M es una subvariedad de una variedad diferenciable $\overline{M}$ se tiene:

1. $\dim M \leq \dim \overline{M}$ (la igualdad se da cuando M está encajada en $\overline{M}$).
2. Si U es un abierto de $\overline{M}$, U puede tomar la estructura diferenciable naturalmente de la de $\overline{M}$, asi que U es una *subvariedad abierta* de $\overline{M}$.
3. Si ϕ es un difeomorfismo de una variedad M, ϕ induce un *automorfismo* ϕ^* del álgebra de funciones diferenciables sobre M; es decir, si $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ entonces, $\phi^*(f) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Este automorfismo está definido por $\phi^*(f)(p) = f(\phi^{-1}(p))$ donde, $(d\phi X)(\phi^* f) = \phi^*(Xf)$.

Entonces, se puede pensar una subvariedad como un subconjunto abierto dentro de otra variedad que es a la vez, una variedad diferenciable. Además, note que una subvariedad está encajada si y sólo si su topología es la inducida del espacio ambiente.

Ejemplo 1.2 *El grupo general lineal real (o grupo de los automorfismos lineales) formado por todas las matrices $n \times n$ no singulares dado por:*

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$$

es una subvariedad de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.
Basta ver que $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ y que por lo tanto tiene estructura de variedad diferenciable (n^2-dimensional).
Para ver que $GL(n, \mathbb{R})$ es un conjunto abierto, se puede considerar la aplicación determinante $det(\cdot) : \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que por ser una función polinómica dependiente de las entradas a_{ij} de A, es una función continua, entonces $GL(n, \mathbb{R})$ es el complemento del conjunto cerrado $\{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) : det(A) = 0\}$, por tanto $GL(n, \mathbb{R})$ es un conjunto abierto de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

1.2. Variedades Riemannianas

En esta sección, se mencionarán sin demostración, algunos resultados sobre variedades riemannianas. El lector interesado en conocer con más detalle tales resultados, puede consultar en la cita bibliográfica correspondiente.
El objetivo de esta sección es introducir los conceptos de variedad riemanniana, isometría e inmersión isométrica; que serán utilizados en el capítulo final así como también los conceptos de conexión y derivada covariante junto con algunas de sus propiedades.

Definición 1.9 *Una **variedad riemanniana** M es una variedad diferenciable junto con un producto interno $\langle , \rangle_p$ en cada espacio tangente T_pM de M [13].*

Además se asumirá que $\langle , \rangle_p$ varía suavemente, esto significa que para cualquier par de campos vectoriales diferenciales X, Y, el producto interno $\langle X_p, Y_p \rangle_p$ es una función suave de p que es a su vez una forma diferenciable $\langle , \rangle$ simétrica, bilineal y definida positivamente.
La forma diferencial $\langle , \rangle$ se le denomina también **métrica riemanniana** [3].
En general, se escribirá $\langle X, Y \rangle$ sin referenciar el punto, teniendo presente que $\langle , \rangle$ se puede evaluar en cada punto $p \in M$ donde X y Y estén definidos.

Ejemplo 1.3 *El ejemplo más simple de variedad riemanniana es $\mathbb{R}^n$. La estructura canónica está definida identificando el haz tangente $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong T\mathbb{R}^n$ vía la aplicación $(p, v) \rightarrow$ velocidad de la curva $c(t) = p + tv$ en $t = 0$. El producto interno está definido por $\langle (p, v); (p, w) \rangle = v \cdot w$.*

Definición 1.10 *Sean M y N variedades riemannianas. Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, f se llama una **isometría (riemanniana)** si para todo $p \in M$, se verifica:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \tag{1.1}$$

para todos los $u, v \in T_pM$ [5].

El conjunto de todas las isometrías de $\mathbb{R}^n$ forma un grupo que se llama el *grupo de las isometrías lineales de* $\mathbb{R}^n$, denotado por $I(\mathbb{R}^n)$. Asi mismo, $I(M)$ denotará el grupo de isometrías lineales $f : M \rightarrow M$ de la variedad M.
Nótese entonces que en $\mathbb{R}^n$, el grupo $I(\mathbb{R}^n)$ está formado por las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones. Es conocido que este grupo está representado por un subgrupo del grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$, el grupo ortogonal $O(n)$.

Definición 1.11 *Sean M y N variedades riemannianas, una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ es una **isometría local** en $p \in M$ si existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ es un difeomorfismo que satisface la ecuación (1.1) $\forall p \in U$, [5].*

Es decir que; la función $f : M \rightarrow N$ es una isometría local, si para cada $p \in M$, $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ es una isometría.

Es común decir que una variedad riemanniana M es **localmente isométrica** a una variedad riemanniana N, si para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p en M y una isometría local $f : U \to f(U) \subset N$.
Note que si N es una variedad diferenciable que tiene estructura riemanniana y $f : M \to N$ es una inmersión; f induce una estructura riemanniana sobre M al definir para $u, v \in T_pM$,

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$$

ya que df_p es inyectiva y $\langle , \rangle_p$ es definida positivamente. Esta métrica se llama *métrica inducida* por f y a la función f se le llama inmersión isométrica, es decir,

Definición 1.12 *Una **inmersión isométrica** entre dos variedades riemannianas M y N, es una inmersión $f : M \to N$ tal que para todo $p \in M$, df_p es una isometría entre los espacios tangentes T_pM y $T_{f(p)}N$ [5].*

En tal caso se dice que M es una subvariedad riemanniana inmersa de N.

Ejemplo 1.4 *Sea $O(n)$ el grupo ortogonal visto como subvariedad de $\mathbb{R}^{n\times n}$ con la métrica inducida $\langle A, B\rangle = traza(A^TB)$ donde $A, B \in O(n)$.*
Defínase la aplicación $L_A : O(n) \to O(n)$ dada por $L_A(B) = AB$, entonces se tiene que dL_A es lineal, puesto que:
$dL_A(B + C) = A(B + C)A = ABA + ACA = dL_A(B) + dL_A(C)$ *y*
$dL_A(\lambda B) = A(\lambda B)A = \lambda ABA = \lambda dL_A(B)$.
Así mismo es fácil ver que dL_A es inyectiva, ya que el núcleo de dL_A es la matriz nula. Por tanto, L_A es una isometría.
Observe que la diferencial $(dL_A)_B : T_BO(n) \to T_BO(n)$ de L_A está definida por $(dL_A)_B(BA) = ABA$ y entonces:

$$\begin{aligned}\langle (dL_A)_B(BA), (dL_A)_B(BA)\rangle_{AB} &= traza((ABA)^TABA)\\ &= traza(A^TB^TA^TABA)\\ &= traza((BA)^T(BA))\\ &= \langle BA, BA\rangle_B.\end{aligned}$$

Luego L_A es una inmersión isométrica para cada $A \in O(n)$.

Definición 1.13 *Sea N una variedad riemanniana. Un espacio conexo M se llama **espacio cubrimiento** sobre N con proyección $P : M \to N$ si para cada $p \in N$ se tiene un abierto U tal que cada componente conexa de $P^{-1}(U)$ es abierta en M y está aplicada homeomorficamente sobre U por P. Si M es simplemente conexo, se le llama **espacio cubrimiento universal** [3].*

En particular, si M y N variedades riemannianas de la misma dimensión y $F : M \to N$ es una inmersión; entonces cualquier métrica riemanniana sobre N induce una métrica riemanniana sobre M, haciendo de F una inmersión isométrica llamada **cubrimiento riemanniano**.

Como dim$M$=dim$N$, F es una isometría local, es decir; para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p en M tal que $F|_U : U \to F(U)$ es una isometría riemanniana [13].

El más importante y a menudo menos comprendido objeto de la geometría riemanniana es la conexión y su función como diferenciación covariante. Además permite definir el concepto central de la geometría riemanniana: *la curvatura*.

Definición 1.14 *Una* ***conexión afín*** ∇ *sobre una variedad diferenciable M es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ denotada por $(X,Y) \to \nabla_X Y$ que satisface para todos los $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y todas las $f, g \in C^\infty(M)$ las siguientes propiedades:*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3. $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$ [5].

Dada una curva diferenciable $c : [0,1] \longmapsto M$ sobre una variedad M, existe un operador *derivada covariante* $\frac{D}{dt}$ a lo largo de $c(t)$ que aplica campos vectoriales tangentes de M a lo largo de $c(t)$ en campos vectoriales tangentes de M también a lo largo de $c(t)$ de la siguiente manera:

Proposición 1.2 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇, existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial X a lo largo de una curva diferenciable $c(t)$ sobre M otro campo vectorial $\frac{D}{dt}X(t)$ a lo largo de la curva $c(t)$, llamada la* ***derivada covariante*** *de X a lo largo de la curva $c(t)$, que está completamente determinada por las siguientes propiedades:*

1. $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y$ *donde Y también es un campo vectorial a lo largo de $c(t)$.*

2. $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{D}{dt}X$ *donde $f \in C^\infty(M)$.*

3. $\frac{D}{dt}Y(c(t)) = \nabla_{c'(t)}Y$ *para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Una prueba de esta proposición aparece en [5] en la pág. 50.

Observación 1.5: Si $c(t) = p$ es una curva constante y X es un campo vectorial a lo largo de $c(t)$, entonces $\frac{D}{dt}X = \frac{d}{dt}X$ donde la derivada del lado izquierdo es la derivada usual en T_pM.
Puesto que $\frac{D}{dt}Y$ es un vector en T_pM, se define una nueva aplicación de T_pM en T_pM, $X_p \to \frac{D}{dt}Y|_{t=0}$ donde la imagen de X_p será denotada por $\nabla_{X_p}Y$ a lo largo de cualquier curva $c(t)$ con $c(0) = p$ y $\frac{dc}{dt}|_{t=0} = X_p$, como se verá en el siguiente teorema.

Teorema 1.1 *(Fundamental de la geometría riemanniana) Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Para cualquier campo vectorial tangente Y de clase C^r sobre M, se tiene en cada punto $p \in M$ una aplicación lineal $X_p \to \nabla_{X_p}Y$ de $T_pM \to T_pM$ con las siguientes propiedades:*

1. *Si X y Y son campos vectoriales de clase C^r sobre M, entonces $\nabla_X Y$ definido por $(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y$ es un campo vectorial sobre M de clase C^{r-1}.*

2. *Si f es una función diferenciable definida en una vecindad de p, la aplicación $T_pM \times \mathfrak{X}(M) \to T_pM$ dada por $(X_p, Y) \to \nabla_{X_p} Y$ es bilineal en X_p y Y,*

$$\nabla_{X_p}(fY) = (X_p f)Y_p + f(p)\nabla_{X_p} Y \text{ (Regla de Leibnitz).}$$

3. *Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.*

4. *Si Y_1, Y_2 son campos vectoriales y $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ es su producto interno, entonces*

$$X_p\langle Y_1, Y_2\rangle = \langle \nabla_{X_p} Y_1, Y_{2_p}\rangle + \langle Y_{1_p}, \nabla_{X_p} Y_2\rangle.$$

La demostración de este teorema puede consultarse en [3] pág. 315.
De manera más general, se tiene

Teorema 1.2 *Dada una variedad riemanniana M, existe una única conexión afín (la conexión de Levi-Civita) ∇ sobre M tal que para todos los $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, satisface las siguientes propiedades:*

1. *$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$ (Compatibilidad de ∇ con la métrica).*

2. *$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Simetría de ∇).*

Una prueba de este teorema aparece en [5] en la pág. 69.
Del teorema anterior se tiene que, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, la conexión de Levi-Civita puede ser computada por la conocida **fórmula de Kozul**

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &+ \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle. \end{aligned}$$

que relaciona la compatibilidad de ∇ con la métrica y su simetría.

Lema 1.1 *Sea M una variedad riemanniana y ∇ una conexión sobre M. Si $p \in M$, $v \in T_pM$, y X, Y son campos vectoriales sobre M tales que $X = Y$ en una vecindad U de p, entonces $\nabla_v X = \nabla_v Y$.*

Demostración: Sea $\lambda : M \to M$ tal que $\lambda \equiv 0$ sobre $M - U$ y $\lambda \equiv 1$ en una vecindad de p. Entonces $\lambda X = \lambda Y$ sobre M. Asi, $\nabla_v \lambda X = \nabla_v X$ puesto que $d\lambda_p = 0$ y $\lambda(p) = 1$. En particular,

$$\nabla_v X = \nabla_v \lambda X = \nabla_v \lambda Y = \nabla_v Y. \blacksquare$$

1.3. Las Ecuaciones Fundamentales de Primer Orden para Subvariedades

El objetivo de esta sección es, obtener las *ecuaciones fundamentales de primer orden* (la segunda forma fundamental, el operador de forma y la conexión normal) que son la principal herramienta para el estudio de subvariedades. Esta ecuaciones pueden ser generalizadas a cualquier variedad riemanniana como espacio ambiente (más información la encuentra en [2] en el capítulo 2).

Sea M una subvariedad de una variedad riemanniana $\overline{M}$ y sean ∇ la conexión sobre M y $\overline{\nabla}$ la conexión sobre $\overline{M}$. Sean X y Y campos vectoriales sobre M. Por el teorema 1.2, si la derivada covariante $\overline{\nabla}_Y X$ satisface las condiciones del teorema fundamental, entonces X, Y pueden ser extendidos a campos vectoriales sobre $\overline{M}$ de tal forma que $\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X$ como muestra el lema 1.1. En adelante se supondrá que tal extensión ya está hecha y por tanto, se introducirán nuevos símbolos.

En la sección 1.1, dada una variedad diferenciable M se definió el concepto de haz tangente TM (definición 1.5) y se observó que la proyección $\pi : TM \to M$ dada por $\pi(p, v) = p$ podía caracterizar el espacio tangente a la variedad como $\pi^{-1}(p) = T_pM$; de tal forma que se puede obtener una colección de espacios vectoriales $\{\pi^{-1}(p) : p \in M\}$. De donde se deriva un nuevo concepto, *haz vectorial.*

Un haz vectorial puede ser visto como la unión disjunta de la forma $\bigcup_{p\in M} \pi^{-1}(p)$ donde cada $\pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial; más exactamente,
Definición 1.15 *Sean N y M variedades diferenciables y $\pi : N \to M$ una aplicación inyectiva continua. La tripla (N, M, π) se llama un* ***haz vectorial diferenciable*** *de dimensión n sobre M si:*

1. *Para cada $p \in M$, la fibra $N_p = \pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial n-dimensional.*

2. *Para cada $p \in M$, existe un par $(\pi^{-1}(U), \varphi)$ donde $\pi^{-1}(U)$ es la preimagen de un abierto U de p y $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo tal que para todo $q \in U$ la aplicación $\varphi_q = \varphi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, donde $E_q = \{q\} \times T_qM$ [3].*

Cuando se cambia la condición de ser espacio vectorial por la condición de ser grupo, lo que se obtiene es un *haz principal* (ver la definición 2.27).

Definición 1.16 *Sea M una variedad diferenciable. Si $\pi : E \to M$ es un haz vectorial, se dice que $\alpha : M \to E$ es una* ***sección*** *del haz (E, M, π) si $(\pi \circ \alpha)(p) = p$ para cada $p \in M$. [3].*

Note que si α es una sección, entonces $\alpha(p) = (p, \beta(p))$ donde $\beta(p) \in \pi^{-1}(p)$. Muchas veces se considera una sección como una función que asigna a cada punto $p \in M$ un elemento en el espacio vectorial $\pi^{-1}(p)$, por ejemplo un campo vectorial tangente sobre M es una sección de TM.

La métrica riemanniana sobre $\overline{M}$ induce de manera natural una métrica riemanniana sobre M; además, también induce a lo largo de M una *división ortogonal* de $T\overline{M}$,

$$T\overline{M}|M = TM \oplus \nu(M)$$

donde $\nu(M)$ es un haz vectorial llamado el *haz normal* de M.
La *fibra* en $p \in M$ de $\nu(M)$ es el espacio normal en p y se denota por $\nu_p(M)$. Esta *fibra* también es caracterizada por $\nu_p(M) = (T_pM)^\perp$. Más precisamente se tiene:

Definición 1.17 *Sea $\overline{M}$ una variedad riemanniana y M una subvariedad de $\overline{M}$. Para cada $p \in M$ se define el **haz normal** $\nu_p(M)$ de M en p por:*

$$\nu_p(M) = \{v \in T_p\overline{M} : \langle v, w\rangle_{\overline{M}} = 0 \quad \forall w \in T_pM\} \quad [3].$$

Entonces, de manera análoga a la caracterización de TM dada en la observación 1.2,

$$\nu(M) = \bigcup_{p\in M} (T_pM)^\perp.$$

Las secciones del haz normal también son campos vectoriales denominados **campos vectoriales normales a** M y serán denotados por ξ ó η.
Nótese que para cada $p \in M$, $\nu_p(M) = (T_pM)^\perp$ pues la proyección canónica es $\pi(v) = p$ si $v \in T_pM$. El conjunto de secciones del haz normal será denotado por $C^\infty(\nu(M))$.

Ecuaciones fundamentales de primer orden

De forma análoga a la geometría de la variedad ambiente $\overline{M}$, se pueden definir conceptos semejantes en la subvariedad M. Se tiene que si $c : [a, b] \to M$ es una curva en una subvariedad $N \subset M$ y $\xi(t)$ un campo de vectores normales a M definido a lo largo de $c(t)$, entonces la derivada covariante normal a lo largo de la curva $c(t)$ se define como la derivada usual euclídea pero proyectada al espacio normal $\nu(M)$. Es decir,

$$\frac{D^\perp}{dt}\xi(t) = [\frac{d}{dt}\xi(t)]^{\nu(M)}.$$

Al descomponer $\overline{\nabla}_X Y$ en su parte tangente $(\overline{\nabla}_X Y)^T$ y su parte normal $(\overline{\nabla}_X Y)^\perp$, la conexión de Levi-Civita ∇ (inducida) en M está dada por:

$$(\overline{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y. \tag{1.2}$$

Así, para derivar tensores que involucren variables tanto tangentes como normales se usará la notación ∇ para variables tangentes y $\nabla^\perp$ para variables normales.

Definición 1.18 *Sea ξ un campo vectorial normal sobre M y X un vector tangente a M en un punto p, entonces la* ***derivada covariante*** *de ξ con respecto a X es:*

$$\nabla_X \xi = \frac{d}{dt}\xi(p + tX) \quad [2].$$

La derivada normal en espacios euclidianos induce de forma natural, una métrica o conexión ∇ sobre el haz normal de la subvariedad, la cuál es llamada *conexión normal*. Sea $\xi \in C^\infty(\nu(M))$, entonces al descomponer $\overline{\nabla}_X \xi$ en sus partes normal y tangencial, se tiene que la parte normal induce una conexión $\nabla^\perp$ sobre $\nu(M)$ de la siguiente forma:

Definición 1.19 *Sea M uns variedad riemanniana. El haz normal $\nu(M)$ tiene asociada una conexión llamada la* ***conexión normal****, $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(\nu(M)) \to C^\infty(\nu(M))$ definida por $(X, \xi) \to \nabla^\perp_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp$ [2].*

Proposición 1.3 *La conexión normal $\nabla^\perp$ satisface para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(\nu(M))$ y $\xi, \eta \in C^\infty(\nu(M))$ las siguientes propiedades:*

1. $\nabla^\perp$ *es* $\mathbb{R} - bineal$
2. $\nabla^\perp_{fX} \xi = f \nabla^\perp_X \xi$
3. $\nabla^\perp_X f\xi = f \nabla^\perp_X \xi + X(f)\xi$
4. $X\langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla^\perp_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla^\perp_X \eta \rangle$.

Definición 1.20 *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define $\alpha(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ como un campo vectorial sobre $\overline{M}$ normal a M llamado* ***la segunda forma fundamental*** *[2].*

De la definición anterior y la ecuación (1.2) se obtiene la siguiente descomposición ortogonal de $\overline{\nabla}$

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \tag{1.3}$$

llamada la **fórmula de Gauss**.

Proposición 1.4 *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\overline{\nabla}$ la conexión en $\overline{M}$; entonces utilizando el teorema 1.1.3 se tiene,*

$$\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X,Y] \in \mathfrak{X}(M) \tag{1.4}$$

y por tanto, la segunda forma fundamental es simétrica, esto es:

$$\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X).$$

Demostración: De la ecuación (1.1.3) se tiene:

$$\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \tag{1.5}$$
$$\alpha(Y,X) = \overline{\nabla}_Y X - \nabla_Y X \tag{1.6}$$

entonces al restar la expresión (1.6) de (1.5)

$$\begin{aligned}
\alpha(X,Y)-\alpha(Y,X) &= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - \overline{\nabla}_Y X + \nabla_Y X \\
&= (\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= [\overline{X},\overline{Y}] - [X,Y] \\
&= [X,Y] - [X,Y] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puesto que $[\overline{X},\overline{Y}] = [X,Y]$ sobre M; por tanto, $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$■

Definición 1.21 *Sea $\xi \in C^{\infty}(\nu(M))$, al descomponer $\overline{\nabla}_X \xi$ en sus componentes normal y tangencial se tiene,*

$$\overline{\nabla}_X \xi = \nabla^{\perp}_X \xi - A_\xi X \tag{1.7}$$

*esta ecuación es conocida como la **fórmula de Weingarten**, donde $A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T$ se llama el **operador de forma** (o de Weingarten) de M en dirección ξ [2].*

Observación 1.6: Note que como $\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ entonces al despejar $A_\xi X$ de la ecuación (1.7):

$$A_\xi X = \nabla^{\perp}_X \xi - \overline{\nabla}_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp} - \overline{\nabla}_X \xi = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T.$$

Proposición 1.5 *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi \in C^{\infty}(\nu(M))$. El operador de forma dado en la ecuación (1.7) es simétrico, es decir:*

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle.$$

Demostración: Por las hipótesis dadas se tiene que $\langle \xi, X\rangle = \langle \xi, Y\rangle = 0$, entonces por la compatibilidad de $\overline{\nabla}$ con la métrica

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\right\rangle + \left\langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\right\rangle = 0 \quad (1)$$

y de igual forma,

$$\left\langle \overline{\nabla}_Y \xi, X\right\rangle + \left\langle \xi, \overline{\nabla}_Y X\right\rangle = 0 \quad (2)$$

Restando (2) de (1), asociando convenientemente y usando la ecuación (1.4) se tiene:

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_Y \xi, X\right\rangle + \left\langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\right\rangle - \left\langle \xi, \overline{\nabla}_Y X\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_Y \xi, X\right\rangle + \left\langle \xi, \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_Y \xi, X\right\rangle + \left\langle \xi, [\overline{X},\overline{Y}]\right\rangle = 0 \qquad (3)$$

ya que el bracket de dos campos tangentes a una subvariedad M es tangente a M, $[\overline{X},\overline{Y}] \in \mathfrak{X}(M)$ y entonces $\left\langle \xi, [\overline{X},\overline{Y}]\right\rangle = 0$ luego en (3):

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_Y \xi, X\right\rangle$$

de la observación 1.6, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_X \xi, Y\right\rangle$ y $\langle A_\xi Y, X\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_Y \xi, X\right\rangle$
de donde se tiene que $A_\xi X = -\overline{\nabla}_X \xi$ y $A_\xi Y = -\overline{\nabla}_Y \xi$.
como $\left\langle -\overline{\nabla}_X \xi, Y\right\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_Y \xi, X\right\rangle = 0$ entonces, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle A_\xi Y, X\rangle$ ∎

Por la proposición anterior, se tiene que para cada $p \in M$ el endomorfismo $A_\xi(p)$ no depende de la extensión de $\xi(p)$ a un campo vectorial normal. Por tanto se puede definir el operador de forma con respecto a cualquier vector normal de M.

Proposición 1.6 *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi \in C^\infty(\nu(M))$. La segunda forma fundamental α y el operador de forma están relacionados por la expresión:*

$$\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle \tag{1.8}$$

Demostración: De las hipótesis dadas se tiene que $\langle Y, \xi\rangle = 0$, entonces $\nabla_X \langle Y, \xi\rangle = 0$. Por la compatibilidad de ∇ con la métrica:

$$\nabla_X \langle Y, \xi\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, \xi\right\rangle + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X \xi\right\rangle = 0 \tag{1.9}$$

y como en la ecuación (1.3) se tiene que $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y)$. Entonces al reemplazar en la expresión (1.9):

$$\langle \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \xi\rangle + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X \xi\right\rangle = 0$$

y por (1.7) $\overline{\nabla}_X \xi = \nabla^\perp_X \xi - A_\xi X$. Por lo tanto:

$$\langle \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \xi\rangle + \left\langle Y, \nabla^\perp_X \xi - A_\xi X\right\rangle = 0.$$

Como $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\nabla^\perp_X \xi \in \nu(M)$, entonces:

$$\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle - \langle Y, A_\xi X\rangle = 0 \quad \text{y de aquí que,} \quad \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle \blacksquare$$

1.4. Las Ecuaciones Fundamentales de Segundo Orden para Subvariedades

Es conocido que $[X, Y]$ es un campo vectorial que mide la conmutatividad del orden de diferenciación, por lo que es natural preguntarse qué pasa con las derivadas ∇_X y ∇_Y de un campo vectorial Z sobre una variedad riemanniana M con respecto a los campos X y Y.
En general, $\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) \neq 0$ y se tiene un nuevo campo vectorial sobre M que puede ser pensado de manera semejante a $[X, Y]$. Él mide la no conmutatividad de las derivadas de funciones $[X, Y]$ y se llama curvatura. Más aún, cualquier conexión sobre una variedad genera un operador que mide en cierta forma, qué relación hay con la conexión estandar de $\mathbb{R}^n$, tal operador es llamado *tensor de curvatura*, el cuál dirá que tan *plana* es la variedad M.

En adelante, M será una subvariedad encajada en una variedad riemanniana $\overline{M}$, R el tensor de curvatura que actúa sobre campos vectoriales tangentes a la variedad riemanniana M y $\overline{R}$ denotará el tensor de curvatura en $\overline{M}$.

Definición 1.22 *El operador de* ***curvatura*** *de una variedad riemanniana M es una correspondencia $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que asocia a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ otro campo vectorial $R(X, Y)$ definido por:*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

donde $Z \in \mathfrak{X}(M)$ y ∇ es la conexión riemanniana de M [5].

Proposición 1.7 *El operador de curvatura R de una variedad riemanniana tiene las siguientes propiedades:*

1. *R es bilineal en $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, para todo $f, g \in C^\infty(M)$ y $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$:*

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1) \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2) \end{aligned}$$

2. *Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios y $f \in C^\infty(M)$ el operador de curvatura es lineal,*

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Demostración: Consultar [13] en la pág 33.

Definición 1.23 *El* ***tensor de curvatura de Riemann*** *es una aplicación*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

definida por $R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle$ para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ [5]

Proposición 1.8 *(Identidades algebraicas de Bianchi) El tensor de curvatura riemanniana R satisface para todos los $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ las siguientes igualdades:*

1. *Identidades algebraicas de curvatura*
   $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle = -\langle R(Z,W)X, Y\rangle$
2. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(primera identidad de Bianchi)*
3. $(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0$ *(segunda identidad de Bianchi)*

Demostración: Puede consultar [13] en la pág 33. ■

Ecuaciones fundamentales de segundo orden

Como es conocido, del tensor de curvatura R se pueden derivar varios y diferentes conceptos de curvatura, a saber, curvatura media y curvatura de Gauss entre otros.
Las ecuaciones de Codazzi y Ricci son importantes para el estudio de subvariedades de los llamados espacios con curvatura constante, ya que ellas son expresiones algebraicas que relacionan las curvaturas del haz tangente y del haz normal, respectivamente, con la segunda forma fundamental de la inmersión.

Definición 1.24 *Sean M una variedad riemanniana, $p \in M$ y π un subespacio 2-dimensional de T_pM dotado de una métrica riemanniana $\langle , \rangle$. La **curvatura seccional** κ para el subespacio π en el punto $p \in M$ se define por el número real:*

$$\kappa(\pi) = R(X, Y, X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X\rangle$$

donde $\{X, Y\}$ es una base ortonormal de π [5].

Definición 1.25 *Sea M una variedad riemanniana. Si la curvatura seccional κ es constante para cada $p \in M$ y para todos los planos π en T_pM, entonces M se denomina **espacio con curvatura constante** [5].*

Un espacio con curvatura constante κ también se llama **espacio forma**, [2].
Las variedades riemannianas que tienen curvatura seccional constante jugaron un papel importante en el desarrollo de la geometría diferencial; una importante propiedad que se demostró sobre ellas, es que tienen un gran número de isometrías locales.
Los espacios más conocidos con curvatura seccional constante κ son el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con $\kappa = 0$ y la esfera unitaria $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $\kappa = 1$. Más detalles de estos espacios se encuentran en [5] en el capítulo 8.

Proposición 1.9 *El tensor de curvatura riemanniana de un espacio forma con curvatura constante κ está dado por:*

$$\overline{R}(X, Y)Z = \kappa(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y).$$

Demostración: Ver [5] en la pág. 96.
La derivada covariante de la segunda forma fundamental y el operador de forma están caracterizados por las fórmulas siguientes:

$$(\nabla_X A)_\xi Y = \nabla_X(A_\xi Y) - A_{\nabla^\perp_X \xi} Y - A_\xi(\nabla_X Y) \tag{1.10}$$

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = \nabla^\perp_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z). \tag{1.11}$$

Las dos derivadas covariantes anteriores están relacionadas por las siguientes ecuaciones

$$\langle(\nabla^\perp_X \alpha)(Y, Z), \xi\rangle = \langle(\nabla_X A)_\xi Y, Z\rangle = \langle(\nabla_X A_\xi)Y, Z\rangle - \langle A_{\nabla^\perp_X \xi} Y, Z\rangle.$$

Proposición 1.10 *La segunda forma fundamental y el operador de forma se relacionan mediante las siguientes derivadas:*

$$\langle(\nabla_X \alpha)(Y, Z), \xi\rangle = \langle(\nabla_X A)_\xi Y, Z\rangle\,. \tag{1.12}$$

Demostración: Puede consultar [2] pág 11.

Si R y $\overline{R}$ son los tensores de curvatura de las variedades riemannianas M y $\overline{M}$ respecpectivamente, se puede relacionar estos tensores con los invariantes extrínsecos A, $\nabla^{\perp}$ y α ya definidos en las primeras ecuaciones fundamentales. Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, usando las fórmulas de Gauss (1.3) y Weingarten (1.7) se tiene:

Proposición 1.11 *Sea M una subvariedad de una variedad riemanniana $\overline{M}$, A el operador de forma, α la segunda forma fundamental y $\nabla^{\perp}$ la conexión normal. Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces:*

$$\overline{R}(X,Y)Z \;=\; R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y + (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z).$$

Demostración: Usando las fórmulas de Gauss (1.3) y Weingarten (1.7) se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \alpha(X,Z)) \\
&+ -(\nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Z],Z)) \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) \\
&- \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) \\
&- \nabla_{X,Y}Z - \alpha(\nabla_X Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, z) \\
&= R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y \\
&+ (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z).\blacksquare
\end{aligned}$$

Cuando M es un espacio forma, la componente tangencial se calcula como:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^T = \kappa(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y) = R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y \quad (1.13)$$

(esta relación es conocida como **la ecuación de Gauss**).
y la componente normal da como resultado:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(Y,Z) = 0. \quad (1.14)$$

(Esta última ecuación es conocida como **la ecuación de Codazzi**).
De esta forma se tiene que $\overline{R}(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^T + (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp}$.

Si W es otro campo vectorial sobre M, la ecuación de Gauss se reescribe como:

$$\kappa(\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) =$$

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle + \langle\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)\rangle.$$

Si ξ es un campo vectorial normal, la ecuación de Codazzi se reescribe como:

$$\langle(\nabla_X A)_\xi Y, Z\rangle - \langle(\nabla_Y A)_\xi X, Z\rangle = 0.$$

En forma similar como en el caso del haz tangente se puede introducir para la conexión normal, una noción de curvatura en el haz normal. Usando de nuevo las fórmulas de Gauss y Weingarten se obtiene:

$$0 = \overline{R}(X,Y)\xi = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi.$$

Aplicando propiedades de la conexión y simplificando términos se llega a:

$$0 = (\nabla_Y A)_\xi X - (\nabla_X A)_\xi Y + R^\perp(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y)$$

por tanto, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.26 *Sea M una variedad riemanniana $\xi \in C^\infty(\nu(M))$ y X, Y campos vectoriales tangentes a M. El* ***tensor de curvatura del haz normal de*** *M con respecto a la conexión normal denotado por $R^\perp$, se define como:*

$$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi \quad [2]$$

Note que $R^\perp(X,Y) = -R^\perp(Y,X)$ así que $R^\perp$ es un endomorfismo antisimétrico del espacio normal.
Si $\xi, \eta \in C^\infty(\nu(M))$, una tercera ecuación importante que se obtiene en un espacio forma es:

$$\langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle. \tag{1.15}$$

que conocida como la **ecuación de Ricci**, donde $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$.
Las ecuaciones de Codazzi y Ricci son particularmente importantes para subvariedades en espacios con curvatura constante, puesto que adoptan una forma más simple:

$$(\nabla_X\alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y\alpha)(X,Z) \text{ (ecuación de Codazzi)}$$

$$([A_\xi, A_\eta]X, Y) = \langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta\rangle \text{ (ecuación de Ricci)}$$

Ya que α es simétrica, la ecuación de Codazzi implica que $\nabla_Y\alpha$ es simétrico en todas sus variables.

Definición 1.27 *Una variedad riemanniana M se llama* ***plana*** *si es localmente isométrica al espacio euclídeo, es decir; si cada punto tiene una vecindad W que es isométrica a un abierto U de $\mathbb{R}^n$ con su métrica euclídea [2].*

Así mismo, se dice que M tiene *haz normal plano* si $R^\perp \equiv 0$ (i.e. el tensor de curvatura riemanniano de M es idénticamente cero).
En un espacio forma, la ecuación de Ricci (1.15) implica el siguiente hecho:

Proposición 1.12 *Sea M una variedad riemanniana. El haz normal $\nu(M)$ es plano si y solo si, para cada $p \in M$, la familia $\{A_\xi : \xi \in \nu_p(M)\}$ es una familia conmutativa de endomorfismos simétricos de T_pM.*

Demostración: Puede encontrar una referencia de su demostración en [2].

Proposición 1.13 *Una variedad riemanniana M tiene curvatura seccional constante e igual a cero si y solo si M es plana.*

Demostración: Puede ser consultada en [8] en la pág. 119.

En el caso de subvariedades de espacios forma, la interpretación geométrica de la ecuación de Ricci es que el tensor de curvatura normal mide la conmutatividad del operador de forma. Una relación no algebraica es dada por la ecuación de Codazzi para la cual se necesita diferenciar la segunda forma fundamental considerada como un tensor. La interpretación geométrica de un haz normal plano es que el transporte paralelo (se definirá en el siguiente capítulo) con respecto a $\nabla^{\perp}$ de vectores normales a lo largo de curvas cerradas en un punto $p \in M$ depende solo de la *clase homotópica* de la curva, lo cual hará parte de las propiedades que involucran el concepto de *holonomía* en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

El Grupo de Holonomía

Luego de que Sophus Lie hiciera el descubrimiento de los grupos (continuos) de transformaciones (ahora llamados grupos de Lie), llegó a ser claro que se tenía muchos modelos interesantes de geometrías. A partir de esto; se lograron clasificar los espacios con curvatura constante cuyo ejemplo más sencillo son los *espacios simétricos*.
Posteriormente, fué Elie Cartan quien mostró su interés en trabajar con estos espacios, y basado en los trabajos de Killing sobre clasificación de álgebras de Lie simples complejas, logra clasificar todas las álgebras de Lie simples reales. Con la ayuda de esto y de diferentes caracterizaciones de los espacios simétricos, Cartan, a mediados de 1920 logró clasificarlos (ver [13]).
Más tarde fué Marcel Berger el que se interesó en la teoría de clasificación dada por Cartan; en su trabajo, relacionó el álgebra con la geometría dando paso a los llamados grupos de holonomía, los cuales se pueden definir a través del transporte paralelo. Matemáticos como Calabi, Yau, Di Scala y Olmos (para citar algunos) recientemente han dedicado sus estudios al desarrollo de esta parte de la geometría y se ha encontrado que muchas propiedades de las variedades riemannianas se pueden leer de su grupo de holonomía (consultar [1], [11] y [14]).

2.1. Grupos y Álgebras de Lie

En esta sección se enunciaran los conceptos de grupo de Lie y de espacio vectorial invariante a izquierda (y a derecha). Se presentarán algunos resultados generales sobre grupos de Lie y sus propiedades mostrando algunos ejemplos; a partir de esto, se define el concepto de álgebra de Lie.

Grupo Monoparamétrico

Recuerde que un *difeomorfismo* de una variedad M en otra variedad N es un homeomorfismo φ tal que φ y φ^{-1} son diferenciables. Un difeomorfismo de M en M se llama una **transformación diferenciable** (o simplemente transformación) de M.

Definición 2.1 *Sea M una variedad diferenciable y X un campo vectorial sobre M. Una curva $c(t)$ en M se llama **curva integral de** X si para cada t el vector $c'(t) = X_{c(t)}$ es tangente a la curva $c(t)$ en $c(0) = p$ [7].*

Definición 2.2 *Sea M una variedad diferenciable. **Un grupo 1-paramétrico (o monoparamétrico) de transformaciones** diferenciables de M es una aplicación $\psi : \mathbb{R} \times M \to M$ denotada por $\psi_t(p)$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\psi_t : p \to \psi_t(p)$ es una transformación de M (en t y en p).*

2. *Para todo $t, s \in \mathbb{R}$ y $p \in M$, $\psi_{t+s}(p) = \psi_t(\psi_s(p)) = (\psi_t \circ \psi_s)(p)$.*

Ejemplo 2.1 *El subgrupo 1-paramétrico de $GL(3, \mathbb{R})$ está dado por la matriz*
$A = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$

Cada grupo 1-paramétrico de transformaciones ψ_t induce un campo vectorial X de la siguiente manera:
Para cada $p \in M$, X_p es el vector tangente a la curva $c(t) = \psi_t(p)$ llamada la **órbita** de p en $\psi_0(p) = p$ (La órbita $\psi_t(p)$ es una curva integral de X que comienza en p). Entonces, para cada $f \in C^\infty(M)$:

$$(Xf)(p) = \text{lím}_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(\psi_t(p)) - f(p))$$

Note que el límite siempre existe porque $\psi_t(p)$ es diferenciable en t y en p.

Definición 2.3 *Se dice que $f \in C^\infty(M)$ es **invariante por** ψ_t si y solo si f es constante en la órbita ψ_t (es decir, $Xf = 0$) [13].*

Un *grupo local 1-paramétrico de transformaciones locales* puede ser definido en la misma forma, excepto que $\psi_t(p)$ está definido solo para t en una vecindad de 0 y p en un conjunto abierto de M; más precisamente,

Definición 2.4 *Sea I_ϵ el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ y U un abierto de M. **Un grupo local 1-paramétrico de transformaciones locales** definido sobre $I_\epsilon \times U$ es una aplicación de $I_\epsilon \times U$ en M que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $t \in I_\epsilon$, $\psi_t : p \to \psi_t(p)$ es un difeomorfismo de U en un abierto $\psi_t(U)$ de M.*

2. *Si $t, s, t+s \in I_\epsilon$ y si $p, \psi_s(p) \in U$ entonces $\psi_{t+s}(p) = \psi_t(\psi_s(p))$.*

Como en el caso de grupos 1-paramétricos de transformaciones, ψ_t induce un campo vectorial X definido sobre U en el siguiente sentido:

$$(Xf)(p) = \text{lím}_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(\psi_t(p)) - f(p)) \, \textit{para todo}\, p \in U.$$

Se dice entonces, que el campo X **genera** el grupo 1-paramétrico local de difeomorfismos ψ_t entorno de p.

Grupos de Lie

Definición 2.5 *Sea G un grupo que es al mismo tiempo una variedad diferenciable; para $a, b \in G$ se denotará por ab, el producto entre a y b y por a^{-1}, el inverso de a. Se dice que G es un **grupo de Lie** si la aplicación $\pi : G \times G \to G$ definida por $\pi(a, b) = ab$ y la aplicación $\iota : G \to G$ dada por $\iota(a) = a^{-1}$ son aplicaciones C^r-diferenciables [3].*

Observación 2.1: (Para más información consultar [4])
1) Como un grupo de Lie es a su vez una variedad diferenciable, la dimensión del grupo será la dimensión de la variedad diferenciable.
2) Al considerar G como una variedad conexa, se tiene que G también es un grupo de Lie localmente conexo.
3) En un grupo de Lie G, el elemento neutro o identidad usualmente se denota por e.
4) Si se denota por G_e a la componente conexa de la identidad e, G_e es abierto y resulta ser un subgrupo topológico conexo de G. Más aún, G_e es generado por cualquier vecindad de la identidad.

A continuación se presentan cuatro ejemplos clásicos:

Ejemplo 2.2 *El espacio $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie abeliano.*
Como $\mathbb{R}^n$ es una variedad n-dimensional, es fácil ver que es un grupo de Lie con la operación de grupo dada por la suma usual de vectores $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\pi(x, y) = x + y$ que es una aplicación diferenciable.
Se tiene además que la aplicación $\iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\iota(x) = -x$ también es diferenciable.

Ejemplo 2.3 *$GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie no conmutativo.*
Sean $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$. Es claro que $AB \in GL(n, \mathbb{R})$ y por tanto $det(AB) \neq 0$, de aquí que $detA \neq 0$ lo cual implica que A tiene una matriz inversa.
Note que, las aplicaciones $\pi(A, B) = AB$ y $\iota(A) = A^{-1}$ son diferenciables, dado que el producto de las matrices $A = (a_{ik})$ y $B = (b_{kj})$ es la matriz $C = (c_{ij})$, donde $c_{ij} = \Sigma a_{ik} b_{kj}$. Es decir, los c_{ij} vienen dados por una función polinómica de grado total 2 en las variables a_{ik}, b_{kj}; por lo que es una función diferenciable.
La inversa de $A = (a_{i,j})$ puede ser escrita como $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \tilde{a_{i,j}}$ donde los $\tilde{a_{i,j}}$ son los cofactores de A y donde $det(A)$ es una función racional que no se anula en $GL(n, \mathbb{R})$.
Luego, $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie pero no conmutativo, puesto que $\pi(A, B) \neq \pi(B, A)$.

Ejemplo 2.4 *El grupo lineal especial es un grupo de Lie.*
El grupo lineal especial que se define por:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) : det(A) = 1\}$$

es un grupo de Lie (por el Teorema de Cartan[1]) puesto que $SL(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo cerrado (es la imagen inversa del número 1 a través de la función $det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$) del grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$.

[1] Todo subgrupo algebráico cerrado de un grupo de Lie es un grupo de Lie

Ahora, al tomar el subgrupo dado por las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ que conservan el producto escalar usual, denotado por $O(n)$; se tiene otro ejemplo de grupo de Lie.

Ejemplo 2.5 *El grupo ortogonal real $O(n)$ es un grupo de Lie.*
El grupo ortogonal real de orden n, es el grupo de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definido por $L(v) = A(v)$ que conservan el producto escalar usual; es decir, tales que:

$$\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle \text{ para cada } v, w\mathbb{R}^n \text{ y } A \in O(n).$$

Es claro que $O(n)$ es un abierto de $GL(n, \mathbb{R})$. Ahora, si se identifica cada vector de $\mathbb{R}^n$ con una matriz columna $(v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$, se tiene que $\langle v, w\rangle = v^T w$ matricialmente, y la condición de ortogonalidad es

$$v^T w = (Av)^T (Aw) = v^T A^T Aw.$$

Por tanto, $A \in O(n)$ si y solo si $A^T A = I$.
Nótese que la condición $A^T A = I$ implica que $det(A^2) = 1$, por tanto $det(A) = \pm 1$, por lo que su componente identidad consiste en las matrices con determinante 1.

En general, cualquier espacio vectorial V sobre los reales de dimensión finita con la suma usual, es un grupo de Lie. La estructura diferenciable resulta de identificarlo con $\mathbb{R}^n$ mediante la *carta global* dada por las coordenadas respecto de una base arbitraria (ver [3] en la pág 15).

Observación 2.2: El grupo $O(n)$ es compacto (es cerrado y acotado); de él se obtiene el subgrupo formado por las matrices con determinante 1 y denotado por $SO(n)$ y llamado *grupo especial ortogonal*, por tanto $SO(n)$ también es compacto (puesto que todo cerrado en un compacto, es compacto).

Así como en $\mathbb{R}^n$ se estudia la geometría euclídea asociada al producto escalar, en los complejos $\mathbb{C}$ la geometría natural de $\mathbb{C}^n$ corresponde al *producto hermítico* dado por:

$$\langle (z_1, ..., z_n), (z'_1, ..., z'_n)\rangle = \bar{z}_1 z'_1 + ... + \bar{z}_n z'_n$$

donde $\bar{z}$ denota el conjugado del complejo z.
Se llama *grupo unitario* $U(n)$ al grupo de transformaciones $\mathbb{C}$-lineales de $\mathbb{C}^n$ que conservan el producto hermítico. Matricialmente,

$$U(n) = \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C}) : A^T \bar{A} = I\}$$

donde $\bar{A}$ denota el conjugado de todas las entradas de la matriz A. Una condición equivalente es que $A^{-1} = A^*$ (aquí A^* denota la matríz hermitiana).
Note que si $A \in U(n)$, como $det(\bar{A}) = \overline{det(A)}$, se tiene que $det(A)$ es un número complejo módulo 1, $|det(A)| = 1$. Se obtiene entonces un nuevo grupo, el *grupo especial unitario* $SU(n)$ formado por las matrices unitarias con determinante 1. Uno de los ejemplos mas importantes de un grupo de Lie no trivial es el siguiente:

Ejemplo 2.6 *Los espacios de* ***Calabi-Yau*** *(de dimensión 4) son grupos de Lie. Este espacio es denotado por $SU(2)$ y definidos por:*

$$SU(2) = \{A \in \mathbb{M}(2, \mathbb{C}) : detA = 1, A^* = A^{-1}\}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} u & \alpha \\ v & \beta \end{pmatrix} \in U(2)$ Entonces la primera columna es un vector $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tal que $|u|^2 + |v|^2 = 1$, es decir es un punto de la esfera unitaria contenida en $\mathbb{R}^4$ dada por $S^3(1) = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$. Además por ortogonalidad para el producto hermítico, la segunda columna es necesariamente de la forma $\lambda(-\bar{v}, \bar{u})$, con $\lambda = det(A)$, que es un complejo de módulo 1.
Recíprocamente, dado $(u, v) \in S^3(1)$ y $\lambda \in S^1$ se tiene la matriz unitaria $\begin{pmatrix} u & -\lambda\bar{v} \\ v & \lambda\bar{u} \end{pmatrix}$ lo que prueba que topológicamente $U(2)$ es $S^1 \times S^3(1)$. La matriz está en $SU(2)$ si y solo si $\lambda = 1$, por tanto $SU(2)$ es $S^3(1)$ como variedad.

Observación 2.3 Existen otros grupos de Lie clásicos que no se presentaran aquí formalmente (para ello puede consultar [4]) pero que sí se definiran, a saber:

1) El grupo general lineal complejo $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C}) : det(A) \neq 0\}$.
2) El grupo simpléctico o spín $Sp(n) = \{A \in \mathbb{H}(n) : A^*A = I\}$ donde $\mathbb{H}(n)$ es el conjunto de las transformaciones $\mathbb{H}$-lineales (por la derecha) del *espacio cuaterniónico* $\mathbb{H}^n$ que conservan el producto hermítico, es decir; $A^*A = I$.
Cabe destacar también que los grupos $U(n)$, $SO(n)$ y $SU(n)$ son compactos [4].
A partir de la aplicación $(x, y) \to xy^{-1}$ en un grupo de Lie G, quedan definidas dos operaciones más (que como se verá, son difeomorfismos):

Definición 2.6 *Sea G un grupo de Lie y sea $y \in G$ arbitrario, entonces para cada $x \in G$ se definen:*

$$L_x : G \to G \text{ tal que } L_x(y) = xy \quad y \quad R_x : G \to G \text{ tal que } R_x(y) = yx.$$

Las operaciones anteriores son llamadas respectivamente ***traslación a izquierda*** *L_x y* ***traslación a derecha*** *R_x [3].*

Proposición 2.1 *Sea G un grupo de Lie y $x, y \in G$. Las aplicaciones L_x y R_x dadas en la definición anterior, son difeomorfismos de G en G.*

Demostración: Se demostrará sólo para la aplicación L_x puesto que, de manera similar se demuestra para la aplicación R_x.
Note que la inversa $(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$; en efecto,

$$((L_x)^{-1} \circ L_x)(y) = (L_x)^{-1}(xy) = x^{-1}xy = y$$
$$(L_x \circ (L_x)^{-1})(y) = L_x(x^{-1}y) = xx^{-1}y = y.$$

Además, $L_{x^{-1}}(y) = x^{-1}y$ es diferenciable porque x, y pertenecen a un grupo de Lie ■
Se tiene también que $R_x R_y = R_{yx}$. Además, $L_x R_y = R_y L_x$. Finalmente; para cada $x \in G$, $I_x = (L_x \circ R_x^{-1}) : G \to G$ denotará el automorfismo interior de G definido por, $I_x(y) = xyx^{-1}$ que es un difeomorfismo de variedades y también un isomorfismo de grupos. Además cumple $I_{xy} = I_x I_y$.

Definición 2.7 *Una métrica riemanniana sobre un grupo de Lie G es **invariante a izquierda** si L_x es una isometría; es decir, si para todo $x, y \in G$, $\quad u, v \in T_yG$*

$$\langle u, v \rangle_y = \langle (dL_x)_y u, (dL_x)_y v \rangle_{L_x(y)}.$$

*Análogamente, se define una métrica riemanniana **invariante a derecha** [5].*

Si la métrica es invariante tanto por izquierda como por derecha, la métrica se llama *bi-invariante.*

Definición 2.8 *Un campo vectorial diferenciable X sobre un grupo de Lie G, se dice **invariante** a izquierda si para todos los $x, y \in G$:*

$$dL_x(y)X(y) = X(xy).$$

Similarmente, el campo X se dice invariante a derecha si $dR_x(y)X(y) = X(yx)$ [5].

En otras palabras, todas las traslaciones a izquierda (o derecha) dejan X invariante. Los campos vectoriales invariantes a izquierda (derecha) están completamente determinados por sus valores en un punto particular de G. Esto permite introducir una estructura adicional sobre el espacio tangente en el neutro $e \in G$, denominada *álgebra de Lie.*

El objetivo ahora es definir esta estructura en un grupo de Lie G. Pero primero se debe dotar a G con una métrica invariante a izquierda; para ello, se toma el elemento neutro e de G con el producto interno $\langle , \rangle$ en G_e y se define para todo $x \in G$ y $X, Y \in T_xG$:

$$\langle X, Y \rangle_x = \langle (dL_{x^{-1}})_x X, (dL_{x^{-1}})_x Y \rangle.$$

Como $L_{x^{-1}}$ es un difeomorfismo, se tiene en G una métrica riemanniana invariante a izquierda. Es decir, que dado un vector tangente X_e en la identidad e, se puede obtener el campo de vectores $\quad X_y = dL_y(X_e) \quad$ que es invariante a izquierda.
Recíprocamente, todo campo de vectores invariante a izquierda determina el vector X_e del campo correspondiente al elemento neutro. Entonces, los campos de vectores invariantes a izquierda se pueden representar por los vectores del espacio vectorial tangente en la identidad e, o sea, G_e.
Entonces; cualquier producto interno sobre T_eG, induce una métrica riemanniana sobre G invariante a izquierda. Así, las traslaciones a izquierda son isometrías riemannianas.

Definición 2.9 *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G es el conjunto de todos los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G con la suma y multiplicación por escalar usuales, además de la operación de bracket [7].*

Como espacio vectorial, $\mathfrak{g}$ es isomorfo al espacio tangente T_eG en la identidad; es decir,

Proposición 2.2 *Sea G un grupo de Lie con neutro e y álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sean X_e el valor del campo X en la identidad e y $\nu : \mathfrak{g} \to T_eG$ la aplicación lineal definida por $\nu(X) = X_e$, entonces ν es un isomorfismo.*

Demostración: Primero se demostrará la linealidad de ν. Sean X y Y campos vectoriales sobre G, entonces:
$\nu(X+Y) = (X+Y)_e = X_e + Y_e = \nu(X) + \nu(Y)$
$\nu(\lambda X) = (\lambda X)_e = \lambda X_e = \lambda \nu(X)$.
Note que $\nu(0) = 0_e = 0$ por tanto ν es inyectiva. ■

Observación 2.4: El isomorfismo ν permite dotar a T_eG de estructura de álgebra de Lie. En efecto, si $X, Y \in T_eG$ son tales que $X = \nu(X)$ y $Y = \nu(Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$ basta colocar $[X,Y] = \nu([X,Y]) = [X,Y]_e$. Es decir, si $X, Y \in T_eG$, se pueden obtener dos campos de vectores diferenciables sobre G y luego calcular $[X_x, Y_x]$, que para $x = e$ dará el vector tangente $[X,Y] \in T_eG$.
De este modo se define en T_eG el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

A través de ese isomorfismo, suelen identificarse $\mathfrak{g}$ y T_eG y se denotan ambas álgebras por $\mathfrak{g}$, es decir que, $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie (con la misma dimensión de G) del álgebra de Lie de campos vectoriales sobre la variedad G denotados por $\mathfrak{X}(G)$.
De ahora en adelante, los elementos en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ serán pensados como vectores en T_eG o como campos vectoriales sobre G invariantes a izquierda.

Definición 2.10 *Un **álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}$-álgebra de Lie) es un espacio vectorial V junto con un corchete de Lie $[,]$, que satisface las siguientes propiedades para todos los $X, Y, Z \in V$,*

1. $[X,Y] = -[Y,X]$ *(anti-conmutatividad)*
2. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ *(Identidad de Jacobi).*

Ejemplo 2.7 *El espacio vectorial $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie con respecto al corchete de Lie. En efecto, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = -(Y(Xf) - X(Yf)) = -[Y,X]f.$$

La identidad de Jacobi se obtiene de:

$$\begin{aligned} [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] &= \\ (XY-YX)Z - Z(XY-YX) + (YZ-ZY)X & \\ -X(YZ-ZY) + (ZX-XZ)Y - Y(ZX-XZ) &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8 *Considere el espacio vectorial $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas $n \times n$. Si se define para $A, B, C \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ la el corchete de Lie dado por:*

$$[A, B] = AB - BA$$

entonces, $(GL(n, \mathbb{R}), [,])$ *es el álgebra de Lie de* $GL(n, \mathbb{R})$*, puesto que:*

1. *Anticonmutatividad* $[A, B] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B]$.

2. *Identidad de Jacobi:*

$$[[A, B], C]+[[B, C], A]+[[C, A], B] = [AB-BA, C]+[BC-CB, A]+[CA-AC, B]$$

$$= [AB, C] - [BA, C] + [BC, A] - [CB, A] - [CA, B] - [AC, B] = 0.$$

Al álgebra de Lie $(GL(n, \mathbb{R}), [,])$ de $GL(n, \mathbb{R})$ se le denota por $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$.

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G tiene una extraordinaria importancia. Por una parte es un álgebra de dimensión finita, lo que permite conocerla con toda precisión; por otra, las álgebras de Lie determinan casi completamente los grupos de Lie en el sentido siguiente:
Si G y H son dos grupos de Lie simplemente conexos y sus álgebras de Lie son isomorfas, entonces G y H son isomorfos como grupos de Lie y además, si $\mathfrak{g}$ es una $\mathbb{R}-$álgebra de Lie de dimensión finita, existe un grupo de Lie cuya álgebra de Lie es el álgebra $\mathfrak{g}$.

Proposición 2.3 *Sea e el elemento neutro (la matriz identidad) de los grupos de Lie clásicos* $GL(\mathbb{R}^n)$*,* $SL(\mathbb{R}^n)$*,* $O(n)$ *y* $SO(n)$*; entonces sus respectivas álgebras de Lie son:*

$$\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n),\ \mathfrak{sl}(\mathbb{R}^n),\ \mathfrak{o}(n)\ y\ \mathfrak{so}(n)$$

y sus espacios tangentes en e son:

$$\begin{gathered} T_eGL(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n\times n} \\ T_eSL(\mathbb{R}^n) \cong \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \textit{traza } (X) = 0\} \\ T_eO(n) \cong \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X + X^T = 0\} \\ T_eSO(n) \cong T_eO(n) \cap T_eSL(\mathbb{R}^n) = T_eO(n). \end{gathered}$$

Con el fin de ver como actúa la diferencial de la traslación respecto del corchete de Lie se presenta la siguiente proposición:

Proposición 2.4 *Sen* $\mathfrak{g}$ *el álgebra de Lie de un grupo de Lie* G*. Si* $X, Y \in \mathfrak{g}$*, entonces* $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.

Demostración: La prueba se obtiene fácilmente del siguiente hecho:

$$dL_x([X, Y]) = [dL_xX, dL_xY] = [X, Y]\ \blacksquare.$$

Como las traslaciones a izquierda son difeomorfismos, se tiene que:

$$dL_x[X,Y] = [(dL_x)X, (dL_x)Y]$$

y por lo tanto, si X, Y son campos vectoriales invariantes a izquierda, entonces el corchete también lo es.
Así, con las operaciones de suma, producto por escalar y el corchete, el conjunto $\mathfrak{g}$ de todos los campos vectoriales invariantes a izquierda forma un álgebra la cual es isomorfa a la anterior y lo cual da otra interpretación del álgebra de Lie del grupo de Lie G.
Por la observación 2.1, la dimensión del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la dimensión de T_eG y por lo tanto, es igual a la dimensión de G.

Observación 2.5: Si H y G son grupos de Lie, un **homomorfismo de grupos de Lie** $\varphi : H \to G$ es un homomorfismo de grupos que es diferenciable.
Note que la aplicación $\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to SL(n,\mathbb{R})$ definida por $\varphi(A) = detA$ es un homomorfismo de grupos de Lie [3].

En particular, el grupo especial ortogonal $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n) : det(A) = 1\}$ es un grupo de Lie de $O(n)$ (pues basta ver que es el núcleo del homomorfismo dado por, $det(\cdot) : O(n,\mathbb{R}) \to \{-1, 1\}$).

Definición 2.11 *Un **subgrupo de Lie** de un grupo de Lie G es un subgrupo H que es al mismo tiempo una subvariedad de G tal que H es un grupo de Lie con respecto a esta estructura diferenciable [13].*

Un campo vectorial invariante a izquierda sobre H está determinado por su valor en e y este vector tangente en e de H, determina un campo vectorial invariante a izquierda sobre G; así, el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H puede ser identificado con un subgrupo de G.
Un resultado relacionado con grupos de Lie que se presenta sin demostración es el siguiente:

Proposición 2.5 *Si G_1 y G_2 son dos grupos de Lie, entonces $G_1 \times G_2$ con el producto directo también lo es; es decir, con la operación $(a_1, b_1).(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$, $G_1 \times G_2$ es un subgrupo de Lie [4].*

2.2. Grupos de Transformaciones

Los grupos de transformaciones de Lie tienen especial importancia en lo que sigue, por ello, se enunciaran algunas de sus características. Se presentaran algunos conceptos algebraicos, a saber: la acción de un grupo sobre una variedad diferenciable, la órbita de un punto que esta sobre una variedad y el grupo de isotropía. Se presentaran algunos ejemplos y se enunciaran propiedades importantes de estos conceptos.

Definición 2.12 *Sean G un grupo y M una variedad diferenciable. Entonces G se dice que **actúa** sobre M (en la izquierda) si hay una aplicación diferenciable $\theta : G \times M \to M$ que satisface dos condiciones:*

1. Si e es el elemento identidad de G, entonces $\theta(e,p) = p$ *para todo* $p \in M$.

2. Si $g_1, g_2 \in G$, entonces $\theta(g_1, \theta(g_2, p)) = \theta(g_1 g_2, p)$ *para todo* $p \in M$ *[3].*

A menudo se escribe gp en lugar de $\theta(g,p)$ y entonces la parte 2, de la definición anterior se escribe también como $(g_1g_2)p = g_1(g_2p)$.

Ejemplo 2.9 *Sean $G = GL(n, \mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces la aplicación:*

$$\theta : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definida por $\theta(A, x) = Ax$, se le llama la acción natural de $GL(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$.
Note que $\theta(I, x) = Ix = x$ y además

$$\theta(A_1, \theta(A_2, x)) = A_1\theta(A_2, x) = A_1A_2x = (A_1A_2)x = \theta(A_1A_2, x).$$

Definición 2.13 *En general, el producto en un grupo de Lie $G \to G$ dado por $(g, h) \to gh$ es una acción de G sobre sí mismo.*

Observación 2.6: Cuando G es además un grupo de Lie, a la aplicación θ dada en la definición anterior, también se le llama **acción** o **grupo de transformación de Lie**.

Definición 2.14 *Sean G y M como en la definición anterior. Se dice que G **actúa libremente** sobre M si $gp = p$ para algún $p \in M$ implica que $g = e$ (la identidad); es decir, la identidad es el único elemento de G que tiene un punto fijo [3].*

También se suele decir que la acción de G es *libre*.

Definición 2.15 *La acción de G sobre M es **propia** si para cualquier par de puntos distintos $p, q \in M$ existen vecindades U_p y U_q de p y q en M respectivamente tal que $\{g \in G : gU_p \cap U_q \neq \Phi)\}$ es relativamente compacto en G [2].*

Sea $\theta_g(p)$ la aplicación $\theta_g : G \times M \to M$ definida por $\theta_g(p) = \theta(g, p) = gp$ con g fijo, entonces, $\theta_{g_1g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$. La aplicación θ_g también puede definirse a la derecha de forma semejante.
Note que $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$ puesto que $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g = \theta_{g^{-1}g} = \theta_e = ep = p$, lo cual implica que cada aplicación θ_g es inyectiva, puesto que tiene inversa. Por tanto la aplicación θ_g (a derecha o izquierda) es la transformación identidad de M.

Definición 2.16 *Sea M es una variedad diferenciable, $I(M)$ el grupo de isometrías de M y G un grupo de Lie se dice que G **actúa sobre** M **por isometrías**, si existe un isomorfismo de grupos de Lie $\theta : G \to I(M)$ y una aplicación $\theta(g, p) \to \theta_g(p) = gp$ que satisface $(g_1g_2)p = g_1(g_2p)$ para todo $g_1, g_2 \in G$ y $p \in M$ [2].*

Es decir, para cada $g \in G$, la aplicación $\theta_g : M \to M$ definida por $\theta_g(p) = gp$ es una isometría de M. Cuando G actúa por isometrías suele decirse que G es **acción isométrica**.

Definición 2.17 *Si θ es una acción de un grupo G sobre una variedad diferenciable M, entonces un campo vectorial X sobre M se dice* ***invariante*** *bajo la acción de G o G-**invariante** si X es invariante bajo cada difeomorfismo $\theta_g(p) = gp$ con g fijo [3].*

Existen transformaciones diferenciables que dan campos vectoriales especiales, así; una clase importante de subvariedades de una variedad diferenciable son las órbitas de las acciones de grupos de Lie.

Definición 2.18 *Una acción isométrica de un grupo de Lie G' sobre una variedad riemanniana M' se dice que es* ***equivalente*** *a la acción de G sobre M si existe un isomorfismo de grupo de Lie $\varphi : G \to G'$ y una isometría $f : M \to M'$ tal que $f(gp) = \varphi(g)f(p)$ para todo $p \in M$, $g \in G$ [7].*

Definición 2.19 *Sea G un grupo que actúa sobre una variedad M. La* ***órbita*** *de la acción de G a través de $p \in M$ es el conjunto $G.p = \{gp|g \in G\}$ [3].*

En general para $N \subset M$ se denota por $G.N = \{gp : g \in G, p \in N\}$. Además, si $G.p = p$, entonces p es un punto fijo de G y se dice que $p, q \in M$ están en la misma órbita si existe un $g \in G$ tal que $gp = q$.

Ejemplo 2.10 *Considere $M = S^2$ y $G = SO(2)$ y ahora tomando $p = (0, 1, 0)$, la órbita de p es $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. Note que su punto* ***antipodal*** *$q = (0, -1, 0)$ está en la misma órbita de p.*

Ejemplo 2.11 *La acción natural de $GL(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ tiene al origen fijo y es transitiva en $\mathbb{R}^n/\{0\}$, por lo tanto sus órbitas son triviales, $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n/\{0\}$.*

Definición 2.20 *Si $G.p = M$ para algún p, entonces se dice que G es* ***transitivo*** *sobre M y en ese caso $G.p = M$ para todo p [3].*

Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado (topológicamente) de G. Considere la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $x^{-1}y \in H$. La clase de equivalencia de x es xH (clases por la izquierda). Sea G/H el conjunto cociente dado por $G/H = \{gH : g \in G\}$ y $\pi : G \to G/H$ la proyección canónica $g \to gH$ denotada por $\pi(x) = [x]$. La topología de G/H dada por π coincide con la topología de G/H dada por la estructura diferenciable además como π es una aplicación continua y H es cerrado en G, entonces G/H es Hausdorff.
Si H es un subgrupo normal de G, entonces G/H es un grupo de Lie respecto a la multiplicación $g_1H.g_2H = (g_1g_2)H$.
Si H es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G, entonces

$$G \times G/H \to G/H,\ (g_1, g_2H) \to (g_1g_2)H$$

es una acción transitiva de G sobre G/H.

Definición 2.21 *Sea G un grupo que actúa sobre un variedad diferenciable M y sea p un punto en M. La* ***estabilidad*** *o* ***el grupo de isotropía*** *de p, denotado por G_p, es el subconjunto de todos los elementos de G que dejan fijo a p, $G_p = \{g \in G | gp = p\}$ [3].*

En particular, cuando M es una variedad riemanniana el subgrupo de isotropía está formado por aplicaciones $f \in I(M)$ con $f(p) = p$

Ejemplo 2.12 *Tomando $M = S^2$ y $G = SO(2)$, la estabilidad de $p = (1, 0, 0)$ es el subconjunto propio F de G, dado por $F = \{I, SO(2)\}$, donde I es la matriz identidad en G.*

Sea G un grupo de Lie, M una variedad riemanniana y suponga que $\theta : G \times M \to M$ es una acción transitiva definida por $\theta(g, p) = gp$. Defina sobre la variedad riemanniana M la relación $\sim$ dada por $p \sim q$ si para algún $g \in G$ se tiene que $q = \theta_g(p) = gp$. Entonces dos puntos de una misma órbita G_p tienen grupos de isotropía conjugados pues $G_{gp} = \{h \in G : h(gp) = gp\} = \{h \in G : g^{-1}hgp = p\} = G_q = gG_pg^{-1}$ y se tiene lo siguiente:

Proposición 2.6 *Sea G un grupo de Lie. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia y las clases de equivalencia coinciden con las órbitas de G.*

Demostración: Note que $p \sim p$ puesto que $p = ep$ (reflexividad). Si $p \sim q$ entonces $q = gp$ lo cual implica que $p = g^{-1}q$, es decir, $q \sim p$. (simetría). Si $p \sim q$ y $q \sim r$ se tiene que $q = gp$ y $r = hq$ así que, $r = (hg)p$ y por tanto $r \sim p$ (transitividad).
Si $p \sim q$ implica que p y q están sobre la misma órbita, así que su clase de equivalencia $[p] \subset G_p$. Ahora, si $q \in G_p$ entonces $p \sim q$ y $G_p \subset [p]$; entonces, $G_p = [p]$. ■

Además, el subgrupo G_p es cerrado en G. Entonces se puede dotar a G/G_p con una estructura de variedad diferenciable. Respecto a esta estructura, la aplicación $G/G_p \to M$ definida por $gG_p \to gp$ es un difeomorfismo. De esta forma, se puede identificar la variedad M con el espacio cociente G/H. Más aún, $\pi : G \to G/H$ es un haz de fibras principal con fibra y estructura de grupo H.

Definición 2.22 *Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie que actúa sobre M: $\theta : G \times M \to M$. El conjunto de las órbitas M/G dotado de la topología cociente se llama espacio de las órbitas de la acción [2].*

Definición 2.23 *Dos órbitas $G.p$ y $G.q$ se dice que tienen la* ***misma clase de órbita*** *si G_p y G_q son conjugados en G [2].*

Puede suceder que M sea la órbita de algún punto p, en ese caso se tiene:

Definición 2.24 *Sea M una variedad riemanniana. Dado un punto $p \in M$, se dice que M es* ***isotrópica*** *en p si existe un grupo de Lie G que actúa sobre M por isometrías tal que el subgrupo de isotropía $G_p \subset G$ actúa transitivamente sobre el conjunto de vectores unitarios en T_pM [11].*

Definición 2.25 *Una **representación** de un grupo de Lie G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo del grupo de Lie G en el grupo $GL(V)$ de las transformaciones lineales no singulares de V en V [5].*

Una característica principal de las acciones propias es la existencia de *slices*.

Definición 2.26 *Sea M una variedad riemanniana y $p \in M$. Una subvariedad N de M se llama un **slice** en p si:*

1. $p \in N$.
2. $G.N = \{gq : g \in G, q \in N\}$ *es un subconjunto abierto de* M.
3. $G_p.N = N$.
4. *La acción de G_p sobre N es isomorfa (define un isomorfismo) a la acción lineal ortogonal de G_p sobre una bola abierta en algún espacio euclídeo.*
5. *La aplicación $(G \times N)/G_p \to M$ tal que $G_p.(g, q) \to gq$ es un difeomorfismo sobre $G.N$, donde $(G \times N)/G_p$ es el espacio de las órbitas de la acción de G_p sobre $G \times N$ dado por $k(g, q) = (gk^{-1}, kq)$ $\forall k \in G_p, g \in G$ y $q \in N$. [2]*

La existencia de slices permiten reducir el estudio de la acción de G sobre M en alguna vecindad abierta G-invariante de p a la acción de G_p sobre el slice N [2].

Definición 2.27 *Sea G un subgrupo de Lie compacto de $SO(n)$. Una órbita $G.v$ se llama **principal** si el subgrupo de isotropía G_v actúa trivialmente sobre el espacio normal $\nu(G.v)$. Tal v se llama **vector principal** [2].*

Observación 2.7: Así que, una órbita $G.p$ se dice *principal* si para cada $q \in M$ el grupo de isotropía G_p en p es conjugado en G para algún subgrupo de G_q. La unión de todas la órbitas principales es un subconjunto abierto y denso de M [2].
Se denotará por $\nu(G.p)$ a el haz normal de $G.p$. Sea $\xi(0)$ un elemento de $\nu_p(G.p)$ entonces $\xi(gp)$ es un campo normal bien definido si $G.p$ es principal. Tales campos normales se llaman *equivariantes*

En adelante se asumirá que la acción de G sobre M es propia y que M/G es conexo.
Si $p \in M$ y $g \in G_p$, entonces θ_g fija p. Luego, en cada punto $p \in M$, el grupo isotrópico G_p actúa sobre T_pM de la siguiente forma:

$$G_p \times T_pM \to T_pM \qquad (g, X) \to g.X = \frac{d}{dt}(\theta_g(p))X.$$

Dado que $G.p$ es invariante bajo $g \in G_p$, esta acción deja el espacio tangente $T_p(G.p)$ y el espacio normal $\nu_p(G.p)$ invariantes en p también. Se tiene entonces la siguiente definición:

Definición 2.28 *Sean M una variedad riemanniana y G_p el grupo isotrópico de $p \in M$. La restricción $X_p : G_p \times T_p(G.p) \to T_p(G.p)$ definida por $X_p(g, X) = g.X$ se llama* ***representación isotrópica de la acción*** *en p, donde la restricción dada por, $\sigma_p : G_p \times \nu_p(G.p) \to \nu_p(G.p)$ se llama* ***representación slice de la acción*** *en p [2].*

Proposición 2.7 *Si $G.p$ es una órbita principal y $\xi \in \nu_p(G.p)$, entonces $\tilde{\xi} = g.\xi$ es un campo vectorial normal bien definido sobre $G.p$*

Demostración: En efecto, si $gp = g'p$, entonces, $g^{-1}g' \in G_p$ y $g^{-1}g'.\xi = \xi$, esto implica que $g.\xi = g'.\xi = \tilde{\xi}$ ■.

Observación 2.8: Si alguna órbita $G.v$ es la esfera $S^{n-1}(||v||)$ (con la restricción de la métrica euclídea a $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$), entonces $G.w = S^{n-1}(||w||)$ para cualquier $w \neq 0$. En ese caso se dice que la acción es transitiva en la esfera.

Definición 2.29 *Sean N y M variedades diferenciables y G un grupo de Lie, se dice que la pareja $(\pi : N \to M, \upsilon : N \times G \to N)$ es un* ***haz principal*** *si:*

1. *υ es una acción a derecha.*
2. *Para cada $m \in M$ se tiene que la fibra $\pi^{-1}(m)$ es preservada por la acción, es decir; si $p \in \pi^{-1}(m)$, se tiene que $\upsilon(p, g) = pg \in \pi^{-1}(m)$ donde $g \in G$.*
3. *La acción en cada fibra es transitiva, es decir; para todo $p, q \in \pi^{-1}(m)$, existe $g \in G$ tal que $q = pg$.*
4. *La acción es libre.*
5. *Para cada punto $m \in M$ existe un abierto U de M que contiene a m y una función $h : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ tal que, $h(x, \gamma g) = h(p, \gamma)g$ para todo $x \in U$, $\gamma, g \in G$.*

Obviamente, se pide que todas las funciones de esta definición sean diferenciables [13]

Ejemplo 2.13 *(Haz de bases de TM) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea:*

$$BM = \{(m, v_1, v_2, ..., v_n) : p \in M; v_1, v_2, ..., v_n \, forman \; una \; base \; de \, T_pM\}$$

y sea $\pi : BM \to M$ la función definida como $\pi(m, v_1, v_2, ..., v_n) = m$.
Tomando $G = GL(n, \mathbb{R})$ y definir la acción a derecha como

$$(m, v_1, v_2, ..., v_n)A = (m, w_1, w_2, ..., w_n) \, donde \, w_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_j$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se verifica fácilmente que esta acción satisface las condiciones 1 a 4 de la definición anterior. La condición 5 se verifica tomando una parametrización de M y definiendo h convenientemente.

Una de las diferencias entre haces vectoriales y haces principales es que en el haz vectorial cada fibra $\pi^{-1}(m)$ tiene estructura de espacio vectorial, en particular hay un elemento O y en un haz principal cada fibra $\pi^{-1}(m)$ no tiene estructura de grupo, en particular, no hay una forma canónica de escoger un elemento identidad.

2.3. Subvariedades Totalmente Geodésicas

Uno de los objetos fundamentales para el estudio de las variedades riemannianas son las *geodésicas.* Es conocido que, dado dos puntos sobre una variedad riemanniana, es posible encontrar curva que minimiza la distancia entre ellos, tal curva es llamada una geodésica. Más aún, si M es una subvariedad de una variedad riemanniana tal que toda geodésica en la subvariedad M es una geodésica en la variedad ambiente también, se dice que la variedad riemanniana es *totalmente geodésica.* En cierto sentido, las subvariedades totalmente geodésicas son el ejemplo mas sencillo de subvariedades. El objetivo de esta sección es enunciar el Teorema de Cartan sobre la existencia de subvariedades totalmente geodésicas.

Como ya se vió en el capítulo anterior, ya que una conexión ∇ define una métrica sobre una variedad riemanniana M se tiene:

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \langle \tfrac{DX(t)}{dt}, Y(t)\rangle + \langle X(t), \tfrac{DY(t)}{dt}\rangle$$

Si $c(t) \equiv p$ es una curva constante, y $X(t)$ es un campo vectorial a lo largo de $c(t)$, entonces $\frac{DX(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}$.

Definición 2.30 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Un campo vectorial $X(t)$ a lo largo de una curva $c : [a, b] \to M$ se dice* ***paralelo*** *si $\dfrac{DX(t)}{dt} = 0$ para todo $t \in [a, b]$ [5].*

Note que $\langle X(t), Y(t)\rangle$ es constante si ambos campos son paralelos a lo largo de c.
De gran importancia en la geometría riemanniana son las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos. Aunque, dados dos puntos arbitrarios, tales curvas no existen en general; ellas siempre existen cuando la variedad es conexa y completa.
El hecho fundamental sobre campos vectoriales paralelos es que cualquier vector tangente en cualquier punto sobre una curva puede ser extendido de manera única a un campo vectorial paralelo a lo largo de toda la curva.

Definición 2.31 *Sea M una variedad riemanniana. Una curva $\gamma : I \to M$ es una* ***geodésica*** *en $t_0 \in I$, si $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = \gamma''(t) = 0$ en el punto t_0; si $\gamma(t)$ es geodésica en t, para todo $t \in I$, entonces $\gamma(t)$ es una geodésica [5].*

Observación 2.9 Es fácil ver que las geodésicas son curvas con aceleración identicamente cero (tienen rapidez constante o $\gamma''(t) = 0$); puesto que:

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 2\langle\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 0$$

esto también significa que $\frac{d\gamma}{dt}$ tiene longitud constante (la longitud se denota por $||.||$) y por tanto $\gamma'(t)$ es ortogonal a $\gamma''(t)$.

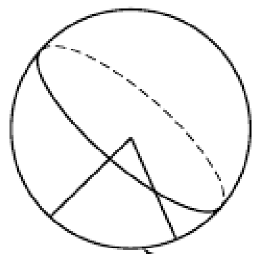

Figura 1: Una geodésica de la esfera [11].

Note que una geodésica puede ser caracterizada como una curva cuyo campo de vectores velocidad es paralelo a lo largo de la curva.

Ejemplo 2.14 *Sobre un grupo de Lie G con una métrica invariante a izquierda, las geodésicas son las curvas integrales para los campos vectoriales invariantes a izquierda. Esto es equivalente a asegurar que $\nabla_X X = 0$ para todo campo vectorial X invariante a izquierda. Más aún, todo grupo de Lie compacto admite métricas bi-invariantes [13].*

Sea $p \in M$ un punto fijo y v un vector en T_pM. De la teoria de ecuaciones diferenciales ordinarias, es conocido que existe una única geodésica $\gamma : I \to M$ definida en una vecindad de $0 \in I \subset \mathbb{R}$ con condición inicial $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$, tal que para cualquier otra geodésica $\alpha : J \to M$ con $0 \in J$, con condición inicial $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $J \subset I$. Esta curva $\gamma(t)$ se llama **geodésica maximal** en M a través de p tangente a v y será denotada por $\gamma_v(t)$.
Observe que $\gamma_v(\lambda t) = \gamma_{\lambda v}(t)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Teorema 2.1 *(de Hopf-Rinow) Sea M una variedad riemanniana y $\gamma_v : I \to M$ una geodésica tal que $\gamma_v(0) = p$ y $(\gamma_v)'(0) = v$. M es completa si y sólo si $\gamma_v(t)$ está definida sobre $\mathbb{R}$ para cada $v \in T_pM$.*

Más aún, existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma_v(t)$ está definida en $[0, 1]$ si $||v|| < \epsilon$ y tal que la aplicación $exp_p : v \to \gamma_v(1)$ definida en la bola abierta $B(\epsilon, 0) \subset T_pM \to M$ es diferenciable.
La aplicación exp_p se llama **aplicación exponencial**. Note que, $exp_p(0) = p$.
La propiedad de homogeneidad $\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1)$ muestra que $exp_p(tv) = \gamma_v(t)$.

Proposición 2.8 *Sea M una variedad riemanniana y $p \in M$. Existe un $\epsilon > 0$ tal que la diferencial de la aplicación exponencial (exp_p) en $0 \in T_pM$ es un difeomorfismo de $B(\epsilon, 0)$ en un abierto U de M.*

Demostración: Al calcular la identidad $d(exp_p)_0$ de T_pM se tiene:

$$\frac{d}{dt}(exp_p)(v)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(exp_p)|_{t=0}(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}(exp_p \circ \alpha)(0) = \gamma_v'(0) = v$$

esto significa, identificando $T_0(T_pM)$ con T_pM, que $\frac{d}{dt}(exp)|_{t=0}$ es la aplicación identidad. Por el Teorema de la función inversa, para un $\epsilon > 0$, $U = exp_p(B(\epsilon, 0))$ es una vecindad de p en M tal que la aplicación $exp_p : B(\epsilon, 0) \to U$ es un difeomorfismo ■

Esta proposición permite afirmar que para $p \in M$, $B(\epsilon, p)$ y para cada $v \in B(\epsilon, 0)$, la geodésica $\gamma_v : [0,1] \to M$ definida por $\gamma_v(t) = exp_p(tv)$ es el único segmento en M definido desde p hasta $exp_p(v)$. Así, si $\alpha(t) = tv$ entonces $\gamma_v'(0) = v$.
Como TM es localmente un producto de M con $\mathbb{R}^n$, entonces cualquier curva $\gamma(t)$ en M determina una curva $(\gamma(t), \frac{d\gamma(t)}{dt})$ en TM.

Cualquier vecindad U de $p \in M$ que es la imagen difeomorfa bajo exp_p de una vecindad abierta de $0 \in T_pM$ como en la proposición anterior, se llama **vecindad normal de** p.

Definición 2.32 *Sea M una variedad riemanniana, $p \in M$ y $B(\epsilon, 0) \subset T_pM$. Si $\epsilon > 0$ es tal que $exp_p : B(\epsilon, 0) \to B(\epsilon, p)$ es un difeomorfismo sobre la bola $B(\epsilon, 0)$ entonces a $exp_p(B(\epsilon, 0))$ se le llama **bola geodésica** en M. El radio (más grande) ϵ para el cual exp_p es un difeomorfismo, se conoce como **radio inyectividad** en p y se dice que M tiene **isometría radial** [13].*

Definición 2.33 *Una variedad riemanniana M se denomina **completa** si para todo $p \in M$, la aplicación exponencial, exp_p está definida para todo $p \in T_pM$ [5].*

Definición 2.34 *Un campo $X(t)$ sobre TM se llama **campo geodésico** sobre TM si sus trayectorias son de la forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$ donde $\gamma(t)$ es geodésica en M [5].*

Sea M una subvariedad de una variedad riemanniana $\overline{M}$. Suponga que $\gamma(t)$ es una geodésica en M, entonces la fórmula de Gauss dice que $\alpha(\gamma'(t), \gamma'(t))$ es la segunda derivada de $\gamma(t)$ cuando es considerada como una curva en el espacio ambiente $\overline{M}$.
Dado que para todos los $X, Y \in T_pM$, $p \in M$:

$$2\alpha(X,Y) = \alpha(X+Y, X+Y) - \alpha(X,X) - \alpha(Y,Y),$$

la segunda forma fundamental se anula si cada geodésica en M es también geodésica en $\overline{M}$, de esta manera $\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. En tal caso M se llama *subvariedad totalmente geodésica de* $\overline{M}$. En particular, geodésicas sobre M son geodésicas sobre $\overline{M}$. Más precisamente,

Definición 2.35 *Sea M una subvariedad de una variedad riemanniana $\overline{M}$. Se dice que M es **totalmente geodésica** en $\overline{M}$ si para cada $p \in M$ una vecindad de $0 \in T_pM$ es aplicada en M via la aplicación exponencial exp_p [13].*

Si M es una subvariedad totalmente geodésica de $\overline{M}$, entonces el tensor de curvatura R de M es la restricción del tensor de curvatura $\overline{R}$ de $\overline{M}$.

$$R(V,W)Z = \overline{R}(V,W)Z \text{ para todo } p \in M \text{ y todo } V,W,Z \in T_pM$$

En particular, si V es un subespacio de $T_p\overline{M}$, la condición $\overline{R}(V,V)V \subset V$ es una condición necesaria para la existencia de una subvariedad M totalmente geodésica y tal que $T_pM = V$, como se verá en la siguiente sección con el Teorema de Cartan.

Campos Jacobi

Como en el caso de curvas sobre una variedad riemanniana M, se puede considerar un campo vectorial diferenciable $X(s,t)$ a lo largo de una función $f \in C^\infty(M)$, lo cual significa que $X(s,t) \in T_{f(s,t)}M$. Si t es un valor fijo, la derivada covariante a lo largo de la curva $s \to f(s,t)$ será denotada por $\frac{D}{\partial s}$ y un vector tangente a la curva será denotado en este caso por $\frac{\partial f}{\partial s}$.
Sea M una subvariedad de una variedad riemanniana $\overline{M}$ y suponga que $\gamma(t)$ es una geodésica que comienza en M (i.e. $\gamma(0)$ está en M y $\gamma'(0)$ es perpendicular a M) Si $\gamma_s(t)$ es una familia uno-paramétrica de geodésicas (o mejor, una variación suave de $\gamma(t) = \gamma_0(t)$), tal que $\gamma_s(0) \in M$ y $\gamma_s'(0)$ es perpendicular a M para todo s, entonces

$$J(t) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\gamma_s(t)$$

es un campo a lo largo de la geodésica $\gamma_0(t)$ denominado **Campo Jacobi**.

Sea $\overline{M}$ una variedad riemanniana y $\gamma : I \to \overline{M}$ una geodésica en $\overline{M}$ parametrizada por longitud de arco ($||\gamma'(t)|| = 1$ para todo t) con $0 \in I$, $\gamma(0) = p \in M$ y $\gamma'(0) \in \nu_p(M)$. Suponga que $V(s,t)$ es una variación suave geodésica de $\gamma(t) = \gamma_0(t)$ con $c(s) = \gamma_s(0) \in M$ y $\xi(s) = \gamma_s'(0) \in \nu_{c(s)}(M)$ para todo s. *El campo vectorial Jacobi* $J(t)$ a lo largo de $\gamma(t)$ inducido por esta variación geodésica está determinado por los valores iniciales:

$$J(0) = \frac{d}{ds}|_{s=0}V(s,0) = \gamma_s(0) = c(s) = c'(0) \in T_pM.$$

Al usar la fórmula de Weingarten,

$$J'(0) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}V(s,t)$$

$$J'(0) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma_s'(0) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\xi(s) = \overline{\nabla}_{J(0)}\xi$$

y de aquí que

$$\overline{\nabla}_{J(0)}\xi = -A_{\xi(0)}J(0) + \nabla^{\perp}_{J(0)}\xi.$$

Así, los valores iniciales de $J(t)$ satisfacen

$$J(0) \in T_{\gamma(0)}M \text{ y } J'(0) + A_{\gamma'(0)}J(0) \in \nu_{\gamma(0)}(M).$$

Este hecho motiva la siguiente definición:

Definición 2.36 *Un campo vectorial $J(t)$ a lo largo de una geodésica $\gamma(t)$ se llama un* ***campo vectorial Jacobi*** *si satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden*

$$J''(t) + R(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0 \ \textit{(ecuación de Jacobi)}\,[2].$$

Ejemplo 2.15 *Sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial real V. Es conocido, que el isomorfismo $f : V \to \mathbb{R}^n$ que asocia a cada vector $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ de V sus coordenadas en la base anterior (es decir, $v \to (x_1, x_2, ..., x_n)$), define una estructura diferenciable en V.*
De esta manera, los campos vectoriales coordenados denotados por ∂_i son campos Jacobi, pues $\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_i}J = -R(J, \nabla_{\partial_i})\nabla_{\partial_i}$. En efecto,

$$-R(J, \nabla_{\partial_i})\nabla_{\partial_i} = R(\nabla_{\partial_i}, J)\nabla_{\partial_i} = \nabla_{\partial_i}\nabla_J\partial_i = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_i}J$$

Una manera relevante (y equivalente) de ver los campos Jacobi es la siguiente: Sea W un campo vectorial sobre M y $f : [0,1] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ dada por $f(t,s) = exp_p(tv(s))$ donde $v : (-\epsilon, \epsilon) \to T_pM$ cumple que $v(0) = \gamma'(0)$ y $v'(0) = W$ entonces se tiene que $J(t) = \frac{\partial}{\partial s}f(t,0)$ es un campo Jacobi.
De hecho todo campo Jacobi con $J(0) = 0$ y $J'(0) = W$ se escribe como muestra el siguiente resultado:

Proposición 2.9 *Si $J(t)$ es un campo Jacobi a lo largo de $\gamma_{c(0)}$ con condición inicial $J(0) = 0$ y $J'(0) = c'(0)$ entonces:*

$$\frac{d}{dt}(exp_p)_{c(0)}(c'(0)) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0,t=1}exp_p(tc(s)) = J(1).$$

Demostración: En efecto, $J(0) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}exp_p(0c(s)) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}p = 0$. Al derivar,

$$J'(0) = \frac{D}{\partial t}|_{t=0}\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}exp_p(tc(s)) = \frac{D}{\partial s}|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}exp_p(tc(s))$$

entonces

$$J'(0) == \frac{D}{ds}|_{s=0}c(s) = \frac{d}{ds}|_{s=0}c(s) = c'(0)$$

Así, $J(0) = 0$ y $J'(0) = c'(0)$.
Suponga que $c(s)$ tiene longitud constante ($||c(s)|| = k$), entonces $\langle c'(0), c(0)\rangle = 0$ y de aquí que $\frac{d}{dt}(exp)_{c(0)}(c'(0)) = J(1)$ donde $J(0) = 0$ y $J'(0) = c'(0) \perp (\gamma_{c(0)})'(0) = c(0)$; entonces

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle J(t), (\gamma_{c(0)})'(t)\rangle = \langle J''(t), (\gamma_{c(0)})'(t)\rangle$$

y de aquí que

$$\langle R(J(t), (\gamma_{c(0)})'(t))(\gamma_{c(0)})'(t), (\gamma_{c(0)})'(t)\rangle = 0$$

pero $\langle J(t), (\gamma_{c(0)})'(t)\rangle$ y su derivada covariante se anula en $t = 0$ (porque $J(0) = 0$ y $J'(0) = c'(0) \perp (\gamma_{c(0)})'(0) = c(0)$); entonces $J(t)$ debe ser siempre perpendicular a $\gamma_{c(0)}(t)$. En particular,

$$0 = \langle (\gamma_{c(0)})'(1), J(1)\rangle = \langle \gamma_{c(0)})'(1), \frac{d}{dt}(exp_p)_{c(0)}(c'(0))\rangle \blacksquare$$

Observe que para cada cualquier $v, w \in exp_p(B(\epsilon, 0))$, $v \perp w$; entonces existe una curva $c(s)$ en la esfera de radio $||v||$ con $c(0) = v$ y $c'(0) = w$. Asi, si $c(t)$ es una curva en $B(\epsilon, 0)$ entonces $exp_p(tc(s)) = \gamma_{c(s)}(t)$ es una familia uno-paramétrica de geodésicas que comienzan en p.

Lema 2.1 *(de Gauss) La imagen por la aplicación exponencial (en cualquier punto dado) de cualquier esfera euclidiana $B(\epsilon, 0)$ del espacio tangente es perpendicular a las geodésicas radiales.*

Definición 2.37 *Sea M una variedad riemanniana. Dada una geodésica $\gamma : [0, a] \to M$ se dice que el punto $\gamma(t)$ con $0 \leq t \leq a$ es **conjugado** a $\gamma(0)$ a lo largo de $\gamma(t)$, si existe un campo Jacobi $J(t)$ no nulo a lo largo de $\gamma(t)$ tal que $J(0) = 0 = J(t)$ [13].*

2.4. Espacios Simétricos

Los espacios simétricos son una clase de subvariedades riemannianas *homogéneas* definidos y estudiados por Elie Cartan a comienzos del siglo XX. Los espacios simétricos son aquellos en los que la simetría geodésica, en cualquier punto, es una isometría. Como se verá, ellos pueden ser descritos localmente ya que, se les caracteriza por el hecho de tener un tensor de curvatura paralelo.

Definición 2.38 *Una variedad riemanniana M se dice **homogénea** si el grupo $I(M)$ de sus isometrías es transitivo sobre M, es decir; para cualquier par de puntos $p, q \in M$ existe una isometría que transforma p en q [9].*

Así, M es homogénea si admite un grupo de Lie que actúe transitivamente por isometrías. Un ejemplo sencillo de una variedad homogénea es el siguiente:

Ejemplo 2.16 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *es un espacio homogéneo de* $GL(n, \mathbb{R})$.

Así mismo, una variedad homogénea que es isotrópica en un punto es isotrópica en cada punto y por tanto se dice que M es homogénea e isotrópica.

Es importante anotar (como se vió en la sección 2.2) que cada órbita $G.p$ donde G es un grupo de Lie y $p \in M$, hereda una estructura riemanniana de la variedad riemanniana ambiente $\overline{M}$. Con respecto a esta estructura, $G.p$ es un espacio riemanniano homogéneo $G.p = G/G_p$ en el que G actúa transitivamente por isometrías. Entonces, se dice que la variedad riemanniana M es homogénea respecto a la acción del grupo de Lie G si G es

un subgrupo cerrado de $I(M)$ actuando sobre M transitivamente.
Así que en un espacio homogéneo, el grupo de isotropía es isomorfo a $O(n)$, porque $\mathbb{R}^n \cong I(\mathbb{R}^n)/\mathbb{R}^n_p$. Lo anterior permite construir muchos ejemplos de variedades diferenciables. Por ejemplo la esfera S^{n-1} es una subvariedad homogénea de $O(n)$. Otro ejemplo importante son las *variedades Grassman:*

Ejemplo 2.17 *Considere el espacio $\mathcal{G}(k,n)$ formado por los subespacios de dimensión k de $\mathbb{R}^n$ que se dota de una estructura diferenciable de forma natural. Considere la acción natural de $GL(n,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ la cual es transitiva en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e induce una acción transitiva*

$$GL(n,\mathbb{R}) \times \mathcal{G}(k,n) \to \mathcal{G}(k,n)$$

Ahora, el subgrupo de isotropía $\mathcal{H}$ del elemento de $\mathcal{G}(k,n)$ que corresponde al subespacio k-dimensional generado por $\{e_1, ..., e_k\}$,

$$\{(x_1, ..., x_k, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n\}$$

está formado por las matrices:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

donde $A \in GL(k,\mathbb{R})$, $C \in GL(n-k,\mathbb{R})$ y B es arbitraria y es un subgrupo de Lie cerrado, por lo tanto $GL(n,\mathbb{R})/\mathcal{H}$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable que se puede trasladar a $\mathcal{G}(k,n)$. Se llaman variedades Grassman a los $\mathcal{G}(k,n)$ con esa estructura.

Ejemplo 2.18 *Considere el grupo de Lie*

$$SO(n+1,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n+1,\mathbb{R}) : det(A) = 1, A^tA = I\},$$

actuando sobre S^n mediante $\theta : SO(n+1,\mathbb{R}) \times S^n \to S^n$, $\theta(A,x) = Ax$ la cual es transitiva y el subgrupo de isotropía de e_{n+1} es isomorfo a $SO(n,\mathbb{R})$, por tanto

$$S^n \equiv SO(n+1,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R}).$$

Definición 2.39 *Sea M una subvariedad de una variedad riemanniana $\overline{M}$. Se dice que M es una* ***subvariedad homogénea*** *de $\overline{M}$ si para cualquier par de puntos $p, q \in M$, existe una isometría g de M tal que $g(M) = M$ y $g(p) = q$ [2].*

Observación 2.10: Una subvariedad homogénea M es una órbita de algún subgrupo G del grupo de isometrías de una variedad riemanniana $\overline{M}$; así por ejemplo, S^1 es una subvariedad homogénea de S^2.
Se presentaran a continuación unos resultados importantes cuya demostración puede ser consultada en [9].

Observación 2.11: Un hecho importante demostrado por Montgomery, es que si $M = G/H$ es un espacio homogéneo compacto con G un grupo de Lie conexo y H un subgrupo conexo y cerrado en G, entonces existe un subgrupo compacto de G que actúa transitivamente sobre M.

Teorema 2.2 *Sea M una variedad riemanniana y p cualquier punto de M, entonces se cumplen las siguientes caracteristicas:*

1. *El grupo $I(M)$ de todas las isometrías es un grupo de Lie que actúa suavemente sobre M.*

2. *El **subgrupo estacionario** $I_p(M) = \{f \in I(M) : f(p) = p\}$ es cerrado en $I(M)$. Más aún, la representación isotrópica $\rho : I_p(M) \to GL(T_pM)$ definida por $\rho(f) = T_pf$ donde $f \in I(M)$, define un isomorfismo del grupo $I_p(M)$ en el subgrupo cerrado del grupo ortogonal $O(T_pM) \subset GL(T_pM)$.*

Corolario 2.1 *Si M una variedad riemanniana y $p \in M$, entonces se tiene:*

1. *$I_p(M)$ es un subgrupo compacto del grupo $I(M)$. Más aún, si M es compacto, entonces $I(M)$ también es compacto.*

2. *$dim(I(M)) \leq \frac{n(n+1)}{2}$, la igualdad se tiene si M es un espacio forma.*

Definición 2.40 *Sea M una variedad riemanniana y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Un campo vectorial X sobre M se llama **campo vectorial Killing** si el grupo local uno-paramétrico de difeomorfismos generado por estos campos, consiste de isometrías locales [9].*

Una caracterización útil de campos vectoriales Killing está dada de la siguiente forma cuya demostración se omitirá

Proposición 2.10 *Un campo vectorial X sobre una variedad riemanniana M es un campo vectorial Killing si y solo si su derivada covariante ∇X es un tensor antisimétrico sobre M, en particular, un campo vectorial Killing X tal que $X_p = 0$ y $(\nabla X)_p = 0$ en algún punto $p \in M$ se anula en cada punto de M.*

Es decir que un campo vectorial Killing está completamente determinado por su valor y su derivada covariante en cualquier punto dado.
Para un campo vectorial Killing completo X sobre una variedad riemanniana, el grupo uno-paramétrico correspondiente está formado por las isometrías de M. Entonces como el bracket de dos campos vectoriales Killing es un campo Killing, el espacio de todos los campos vectoriales Killing es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de todos los campos vectoriales.

Teorema 2.3 *Sobre una variedad completa M, cualquier campo Killing es completo; es decir, genera un grupo uno-paramétrico de isometrías, y el álgebra de Lie de campos vectoriales Killing es el álgebra de Lie del grupo de Lie $I(M)$.*

Definición 2.41 *Una variedad riemanniana conexa M es un **espacio simétrico** si para cada $p \in M$ el grupo isotrópico G_p contiene una isometría $A_p : M \to M$ tal que $A_p(p) = p$ (es involutiva) y la diferencial $DA_p : T_pM \to T_pM$ es la aplicación antipodal denotada por $-I$; es decir, $T_pA_p = -Id_{T_pM}$ [9].*

Por tanto, M es un espacio simétrico si existe una simetría involutiva A_p (también se llama simetría centrada en el punto p) de M tal que p es un punto fijo aislado de A_p y se dice que A_p es la simetría de M en p.
Dado que las isometrías preservan geodésicas, se tiene que para cualquier geodésica $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = p$, $A_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$ y por tanto los espacios simétricos son espacios homogéneos y completos, esto es

Teorema 2.4 *Todo espacio simétrico riemanniano M es homogéneo.*

Demostración: En efecto M es completa, ya que cualquier segmento geodésico puede ser prolongado usando las simetrías centradas en sus puntos finales. Ahora, si dos puntos están unidos por una geodésica entonces, la simetría en el punto medio de esos puntos sobre la geodésica es una isometría que aplica esos puntos uno con el otro. Así cualquier par de puntos, se pueden unir por sucesiones de trozos de geodésicas que son aplicadas una en la otra por isometrías; esto muestra que el espacio es homogéneo.
Por tanto, para cualquier $p, q \in M$, la simetría con respecto al punto medio de cualquier segmento geodésico que conecta p con q (que existe por la completes) intercambia p y q. Por tanto, el grupo de isometría actúa transitivamente. ■

Sea M un espacio homogéneo y suponga que existe una simetría de M en un punto $p \in M$. Sea q cualquier punto en M y g una isometría de M con $g(p) = q$. Entonces $A_q = gA_pg^{-1}$ es una simetría de M en q. Para mostrar que un espacio homogéneo es simétrico es suficiente construir una simetría en un punto. Usando esto, fácilmente se obtienen ejemplos de espacios simétricos.

Los ejemplos mas sencillos de espacios homogéneos simétricos son el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ puesto que $\mathbb{R}^n$ es simétrico con $A_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definido por $p \to -p$ y la esfera S^n, ya que $S^n \to S^n$ definida por $(p_1, ..., p_n, p_{n+1}) \to (-p_1, ..., -p_n, p_{n+1})$ es una simetría de la esfera S^n en $(0, ..., 0, 1)$

Observación 2.12: En particular, cualquier grupo de Lie G conexo con métrica bi-invariante es un espacio simétrico, ya que cualquier producto interno invariante sobre $\mathfrak{g}$ se extiende a una métrica bi-invariante sobre G. Con respecto a esta métrica, la aplicación inversa $A_e : G \to G$ definida por $A_e(g) = g^{-1}$ es una simetría de G en e [13].

Definición 2.42 *El **rango** de una variedad riemanniana homogénea M el la dimensión máxima de una subvariedad totalmente geodésica plana.* [9]

En los trabajos de Montgomery, Samelson y Borel, todos los grupos de Lie conexos y compactos que actúan transitiva y efectivamente sobre esferas, estan clasificados. Algunas de esas clasificaciones se presentan aquí. Cabe destacar que hay más familias y varios ejemplos excepcionales también:

grupo	rango	dimensión
$SU(n+1)$	n	$n(n+2)$
$SO(2n+1)$	n	$n(2n+1)$
$SO(2n)$	n	$n(2n-1)$
$Sp(n)$	n	$n(2n+1)$

Cuadro 2.1: Grupos de Lie con métricas bi-invariante

grupo de isometría	grupo de isotropía	dimensión	rango	descripción
$SO(n+1)$	$SO(n)$	n	1	esfera
$O(n+1)$	$O(n)\times\{1,-1\}$	n	1	$\mathbb{R}P^n$
$U(n+1)$	$U(n)\times U(1)$	$2n$	1	$\mathbb{C}P^n$
$Sp(n+1)$	$Sp(n)\times Sp(1)$	$4n$	1	$\mathbb{H}P^n$

Cuadro 2.2: Ejemplos homogéneos compactos

Una propiedad interesante de los espacios simétricos es que tienen un tensor de curvatura paralelo, esto se debe a que las simetrías A_p dejan el tensor de curvatura y su derivada covariante, invariante; en particular:

$$DA_p((\nabla_X R)(Y,Z,W)) = (\nabla_{DA_pX}R)(DA_pY, DA_pZ, DA_pW)$$

y de aquí que,

$$-(\nabla_X R)(Y,Z,W) = (\nabla_{-X}R)(-Y,-Z,-W) = (\nabla_X R)(Y,Z,W)$$

así, $\nabla R = 0$. Esto casi caracteriza un espacio simétrico.

Teorema 2.5 ***(de Cartan)****: Si M es una variedad riemanniana con tensor de curvatura paralelo, entonces para cada $p \in M$ existe una isometría A_p definida en una vecindad de p con $DA_p = -I$ sobre T_pM. Más aún, si M es simplemente conexa y completa, entonces la isometría está definida sobre todo M y en particular, el espacio es simétrico.*

Demostración: Ver [13] pág. 238.

Corolario 2.2 *Si M es una variedad riemanniana compacta, entonces para cada p de M y $v \in T_pM$, hay una geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to M$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.*

Definición 2.43 *Una variedad riemanniana M con tensor de curvatura R paralelo (es decir, con $\nabla R = 0$) se denomina un* ***espacio localmente simétrico*** *[13].*

Por el Teorema de Cartan, si M es un espacio localmente simétrico, conexo y completo; entonces su cubrimiento universal riemanniano es un espacio simétrico.
Si se tiene una isometría lineal que preserva el tensor de curvatura en cualquier punto, entonces se puede extender el teorema anterior a espacios simétricos, donde la curvatura es la misma en todas partes:

Teorema 2.6 *(de E. Cartan) Sea M un espacio simétrico simplemente conexo y N un espacio localmente simétrico completo de la misma dimensión. Dada una isometría lineal $L : T_pM \to T_qN$ tal que $L(R(X,Y)Z) = R(L(X), L(Y))L(Z)$ para todo $X, Y, Z \in T_pM$ hay una única isometría riemanniana $F : M \to N$ tal que $D_pF = L$.*

Demostración: Consultar [13] en la pág. 239.

Teorema 2.7 ***(de Cartan sobre la existencia de subvariedades totalmente geodésicas)*** *Sea $\overline{M}$ una variedad riemanniana, $p \in \overline{M}$ y sea $\rho > 0$ el radio inyectividad en p. Sea V un subespacio de $T_p\overline{M}$ y sea V_ρ la bola abierta de radio ρ en V. Entonces $exp_p(V_\rho)$ es una subvariedad totalmente geodésica de $\overline{M}$ si y solo si el tensor de curvatura de $\overline{M}$ preserva el transporte paralelo de V a lo largo de las geodésicas radiales de longitud menor que ρ, con condición inicial en V.*

Corolario 2.3 *Sea $\overline{M}$ una variedad riemanniana localmente simétrica y sea V un subespacio de T_pM que es invariante bajo el tensor de curvatura en p, (es decir que $R(V,V)V \subset V$). Entonces, para $\epsilon > 0$ pequeño, $exp(V_\epsilon)$ es una subvariedad de M totalmente geodésica, donde $V_\epsilon = \{v \in V : ||v|| < \epsilon\}$.*

Lema 2.2 *Sea $g_t : S \to M$, $|t| < \epsilon$ una familia suave de subvariedades totalmente geodésicas de una variedad riemanniana M. Si el campo variación $q \to \frac{\partial}{\partial t} g_t(q)$ es perpendicular a la subvariedad S_t entonces $g_t : S_0 \to S_t$ es una isometría, donde S_t es S con la métrica inducida por g_t.*

Demostración: En efecto, si $\gamma_w(t)$ es una geodésica de S_0 a través de q:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle g_{t*q}w, g_{t*q}w\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial}{\partial s}_{|_{S=0}} g_t(\gamma_w(s)), \frac{\partial}{\partial s}_{|_{S=0}} g_t(\gamma_w(s))\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}_{|_{S=0}} g_t(\gamma_w(s)), g_{t*q}w\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{D}{\partial s}_{|_{S=0}}\frac{\partial}{\partial t} g_t(\gamma_w(s)), g_{t*q}w\right\rangle \\
&= -2\langle A_{\xi_t} g_{t*q}w, g_{t*q}w\rangle = 0.
\end{aligned}$$

donde $\xi(t)$ es el campo variación en el punto q de S_t y A denota el operador de forma de S_t. Entonces, $\langle g_{t*q}w, g_{t*q}w\rangle$ no depende sobre t y así, $g_t : S_0 \to S_t$ es una isometría; puesto que $g_0 : S_0 \to S_0$, es la aplicación identidad $\blacksquare$.

2.5. El Grupo de Holonomía

La derivada covariante permite definir uno de los conceptos básicos sobre los cuales se edifica la geometría riemanniana: el transporte paralelo a lo largo de curvas. En particular, permite conocer las geodésicas (curvas que localmente minimizan distancias). En esta sección se definirá el grupo de holonomía de una variedad riemanniana y se dará una breve discusión de como usar la holonomía para determinar como un espacio simétrico puede ser clasificado de acuerdo a si es compacto o no.

Definición 2.44 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇. Un campo vectorial Y se dice que es* ***constante*** *si $\nabla_{X_p} Y = 0$ para todo $p \in M$ y $X_p \in T_pM$* [5].

Por lo general, no existen tales campos vectoriales sobre los subconjuntos abiertos de la variedad M. Sin embargo, como se verá a continuación, dada una curva diferenciable $c(t)$, $0 \leq t \leq 1$ sobre M, se puede mostrar existe un campo vectorial $X(t) = X_{c(t)}$ constante o paralelo a lo largo tal curva $c(t)$.
Note que una geodésica puede ser caracterizada como una curva cuyo campo de vectores velocidad es paralelo a lo largo de la curva.
Para cada $t \in [0,1]$ existe una aplicación lineal bien definida $\tau_{c(t)} : T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$ llamada **transporte paralelo** a lo largo de $c(t)$.

Proposición 2.11 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Sea $c(t)$ una curva diferenciable sobre M. Para cada $v \in T_{c(t_0)}M$, $t_0 \in [0,1]$ existe un único campo vectorial paralelo $X_v(t)$ a lo largo de $c(t)$ tal que $X_v(t_0) = v$.*

Demostración: Se basa en encontrar la solución al problema de ecuaciones diferenciales ordinarias $\frac{D}{dt}X(t) = 0$ con $X(0) = v$. Una prueba completa de este resultado aparece en [5] en la pág 52.

Proposición 2.12 *Sea M una variedad diferenciable y $p, q \in M$. Si $c : [0,1] \rightarrow M$ es una curva que une $p = c(0)$ con $q = c(1)$, el transporte paralelo a lo largo de $c(t)$ define un isomorfismo lineal $\tau_c : T_pM \rightarrow T_qM$ entre los espacios tangentes en p y q respectivamente, definido por $\tau_c(v) = X(1)$.*

Demostración: Sean $v, w \in T_pM$, α un escalar y $X(t), Y(t)$ campos vectoriales tangentes a M en $c(t_0)$ tales que $X(0) = v$, $\frac{D}{dt}X(t) = 0$ y $Y(0) = w$, $\frac{D}{dt}Y(t) = 0$.
Como T_pM es un espacio vectorial, $(\alpha X)(0) = \alpha(X(0)) = \alpha v$ y $\frac{D}{dt}(\alpha X) = \alpha \frac{D}{dt}X(t) = 0$ entonces:

$$\tau_c(\alpha v) = (\alpha X)(1) = \alpha X(1) = \alpha \tau_c(v)$$

y como $(X+Y)(0) = v + w$ y $\frac{D}{dt}(X+Y)(t) = \frac{D}{dt}X(t) + \frac{D}{dt}Y(t) = 0$ entonces:

$$\tau_c(v+w) = (X+Y)(1) = X(1) + Y(1) = \tau_c(v) + \tau_c(w).$$

por tanto τ_c es una aplicación lineal.
Para ver que es un isomorfismo basta notar que para el campo 0 se cumple que

$$0(0) = 0, \quad \frac{D}{dt}(0) = 0 \text{ y } \tau_c(0) = 0(1) = 0. \blacksquare$$

Intuitivamente, una forma de visualizar el transporte paralelo en subvariedades es pensándolo como el campo vectorial unitario mas *económico* de llevar, a lo largo de la curva, el vector $X(t)$ tangente a M en el punto p hasta un vector tangente en q.

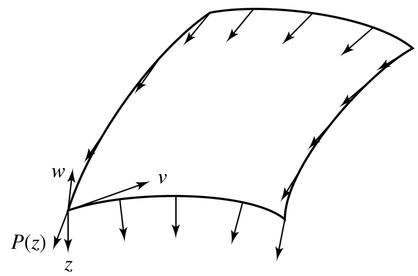

Figura 2: Transporte paralelo del vector $P(z)$ [13]

La traslación paralela, siempre en una variedad diferenciable, consiste en dar un campo vectorial que en algún punto prefijado se comporte como paralelo a un vector dado.

Proposición 2.13 *La aplicación $\tau_c : T_pM \to T_qM$ (el transporte paralelo) dada en la proposición anterior es una isometría (lineal).*

Demostración: Si τ_c es una isometría, se debe probar que dados $v, w \in T_pM$,

$$\langle v, w\rangle = \langle \tau_c(v), \tau_c(w)\rangle,$$

pero esto es equivalente a demostrar que $\langle v, v\rangle = \langle \tau_c(v), \tau_c(v)\rangle$.
Como el campo X es tal que $X(0) = V$, $\frac{D}{dt}X(t) = 0$ y $\tau_c(v) = X(1)$, entonces:

$$\langle X(0), X(0)\rangle = \langle X(1), X(1)\rangle$$

pero note que para todo $t \in [0, 1]$,

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), X(t)\rangle = 2\langle \frac{D}{dt}X(t), X(t)\rangle = 2\langle 0, X(t)\rangle = 0$$

luego, $X(t)$ es el campo constante, así $\langle X(t), X(t)\rangle = \langle v, v\rangle$ para todo $t \in [0, 1]$, por lo tanto, τ_c es una aplicación lineal ■

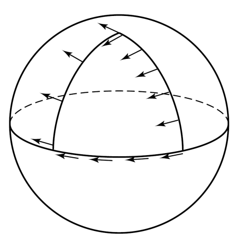

Figura 3: El transporte paralelo es una isometría [13].

La derivada covariante y el transporte paralelo a lo largo de $c(t)$ estan relacionados por

$$\frac{D}{dt}X(t) = \frac{d}{dh}|_{h=0}(\tau_c(t + h))^{-1}X(t + h)$$

Así, si M es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, entonces $X(t)$ es el campo constante e igual a $X(0)$.

Note que el transporte paralelo a lo largo de cualquier curva es independiente de la curva. Si $c_1(t)$, $a \leq t \leq b$ y $c_2(t)$, $c \leq t \leq d$ son curvas sobre M; el transporte paralelo a lo largo de $c_1(t)$ y a lo largo de $c_2(t)$, coincide si hay un homeomorfismo $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ tal que:

1. $\varphi(a) = c$ y $\varphi(b) = d$.
2. φ y φ^{-1} son diferenciables.
3. $c_2(\varphi(t)) = c_1(t)$ para todo $t \in [a,b]$.

Recuerde que de la definición 1.27 una variedad riemanniana se denomina plana si su tensor de curvatura se anula. Esto implica que localmente el transporte paralelo en el espacio euclídeo, no depende de las curvas utilizadas para unir un par de puntos p y q dados (esto se debe a que el espacio euclídeo es plano, sin curvatura). Si el tensor de curvatura no se anula, el transporte paralelo es dependiente de la curva; pero esto no es cierto para una variedad riemanniana arbitraria, como se verifica en la esfera, es decir; en general, el transporte paralelo depende de las curvas utilizadas para unir dos puntos puesto que, $X(t)$ se mueve a lo largo de la curva entonces, $X(t)$ se debe acomodar a la forma de la variedad M. Esto implica en particular, que el transporte paralelo es invariante bajo el subgrupo formado por las curvas que transportan un punto p hasta otro punto q en la variedad.
Si τ_c es la curva $c_1(t)$, $t \in [a,b]$, se denotará por τ_c^{-1} la curva $c_2(t)$ donde $t \in [a,b]$ definida por $c_2(t) = c_1(a+b-t)$. Un resultado que se sigue de este es el siguiente:

Proposición 2.14 *Sea M una variedad diferenciable y $p, q, r \in M$.*

1. *Si $c(t)$ es una curva sobre M, el transporte paralelo a lo largo de $\tau_c^{-1} : T_qM \to T_pM$ coincide con el transporte paralelo a lo largo de $c(t)$ pero recorrida en sentido inverso.*
2. *Si $c(t)$ es una curva desde p a q y α es una curva desde q a r, el transporte paralelo a lo largo de la curva compuesta $c \circ \alpha$ es la composición de los transportes paralelos τ y α.*

Proposición 2.15 *Sean M una variedad riemanniana, $p \in M$ y $\Omega(p)$ el conjunto de todas las curvas suaves $c : [0,1] \to M$ con $c(0) = c(1) = p$. Entonces, el transporte paralelo a lo largo de cualquier curva $c(t) \in \Omega(p)$ desde $c(0)$ hasta $c(1)$ es una transformación ortogonal de T_pM.*

Demostración: Consultar [7].
La dependencia del transporte paralelo de las curvas utilizadas, se puede medir y esto se hace a través del denominado *grupo de holonomía* $Hol_p(M)$ de M en el punto p. En otras palabras, $Hol_p(M)$ mide cuanto se aparta M de ser plana.
En virtud de la proposición 2.14 se tiene la siguiente definición:

Definición 2.45 *Sea M una variedad riemanniana y $p \in M$, el conjunto de todas las traslaciones paralelas dadas en la proposición anterior forman un grupo llamado el* ***grupo de holonomía*** *en p y se define por:*

$$Hol_p(M) = \{\tau_c : \ c(t) \text{ es una curva cerrada en } M \text{ por } p,\, c(t) \in \Omega(p)\}.$$

(La aplicación τ_c denota el efecto de transportar paralelamente un vector en $T_{c(a)}M$ a lo largo de c a $T_{c(b)}M$). [2]

Dado que el transporte paralelo es una isometría lineal, se tiene que $Hol_p(M)$ es un subgrupo del grupo de las transformaciones ortogonales del espacio euclídeo T_pM (este espacio se denota por $O(T_pM)$ y coincide con $O(n)$); es decir,

Proposición 2.16 *$Hol_p(M)$ bajo la operación composición, es un subgrupo de $O(T_pM)$.*

Demostración: Basta mostrar que en $Hol_p(M)$

1. Existe un elemento neutro.
2. Cada elemento tiene su inverso en $Hol_p(M)$.
3. Hay asociatividad.

Solo se demostraran las propiedades 1 y 2:

1. Puesto que la aplicación $e : T_pM \to T_pM$ definida por $e(v) = X(1)$ satisface que $X(0) = v$ y $\frac{D}{dt}X(t) = 0$ se tiene que la aplicación denotada por e es el neutro en $Hol_p(M)$. En efecto, si $\tau_c(v) \in Hol_p(M)$ entonces existe un campo vectorial $Y(t)$ tal que $\tau_c(v) = Y(t)$ y

$$(e \circ \tau_c)(v) = e(\tau_c(v)) = e(Y) = Y(1)$$

$$(\tau_c \circ e)(v) = \tau_c(e(v)) = \tau_c(v) = Y(1).$$

2. Si $\alpha : [0,1] \to M$ es una curva definida por $\alpha(t) = c(1-t)$ para todo $t \in [0,1]$ entonces:

$$\alpha(0) = c(1) = p \text{ y } \alpha(1) = c(0) = p$$

por tanto el transporte paralelo a lo largo de la curva $\alpha(t)$ estará dado por $\tau_\alpha : T_pM \to T_pM$ así que si $v \in T_pM$ entonces $\tau_\alpha(v) = X(1)$ y por tanto existe un único campo $Y(t)$ tal que $Y(0) = X(1)$ y $\frac{D}{dt}Y(t) = 0$ que está dado por $Y(t) = X(1-t)$. (Note que $\frac{D}{dt}Y(t) = -\frac{D}{dt}X(t) = 0$), entonces $\tau_\alpha = \tau_c^{-1}$, puesto que

$$(\tau_c^{-1} \circ \tau_c)(v) = \tau_c^{-1}(\tau_c(v)) = \tau_c^{-1}(X(1)) = Y(1) = X(0) = v = e(v)$$

$$(\tau_c \circ \tau_c^{-1})(v) = \tau_c(\tau_c^{-1}(v)) = \tau_c(Y(1)) = \tau_c(X(0)) = \tau_c(v) = X(1) = v.$$

Ejemplo 2.19 *El grupo de holonomía de S^2 es $SO(2)$, dado que las rotaciones sobre el eje z son una isometría:*

$$Hol_p(M) = \{\tau(x,y,z) = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$Hol_p(M) = \{\begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} : \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

de donde $Hol_p(M) = SO(T_pS^2) = SO(2)$.

En general, si r es un número real y $S^n(r)$ es la esfera n+1-dimensional de radio r, $Hol_p(S^n(r)) = SO(n)$. Además también se puede mostrar que $Hol_p(\mathbb{R}^n) = \{1\}$.
Observe que $Hol_p(M)$ es un grupo de Lie y a menudo también resulta ser un subgrupo cerrado de $O(n)$.

Ejemplo 2.20 *El grupo de holonomía de $\mathbb{R}^n$ es el grupo trivial, su único elemento es la transformación idéntica del espacio tangente $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.*

Lema 2.3 *(**Principio de holonomía:**) Sea M una variedad riemanniana conexa y $p \in M$. La evaluación en p establece una correspondencia uno a uno entre campos paralelos y campos sobre T_pM invariantes bajo $Hol_p(M)$.*

En el capítulo 3, se ilustrará este principio a través de la lista dada por Berger. Los casos más simples son:

1. $Hol(M) = SO(n)$ significa que no hay campos paralelos (aparte de la métrica y la orientación). Tal métrica a menudo se llama *genérica*.

2. $U(n)$ es el subgrupo de $SO(2n)$ preservando una estructura compleja J sobre $\mathbb{R}^{2n}$ que es ortogonal (esto es, $J \in SO(2n)$) Por tanto las variedades con holonomía contenida en $U(n)$ son variedades riemannianas con una estructura compleja J que es ortogonal y paralela. Esto es una caracterización clásica de variedades *Kähler*. Una variedad compleja compacta simplemente conexa que admite una métrica con holonomía contenida en $SU(n)$ se dice que es una variedad *Calabi-Yau*.

Observación 2.13: Hay una variante en la definición 2.45. Dado que el grupo de holonomía de M en p, $Hol_p(M)$ es un subgrupo de $O(n)$, este tiene la topología natural. Con respecto a esta topología, la componente identidad $Hol_p^0(M)$ de $Hol_p(M)$ es llamada el **grupo de holonomía restricto** de M en p.
El *grupo de holonomía restricto* de una variedad riemanniana M es el subgrupo de $Hol_p(M)$ formado por todas las transformaciones obtenidas desde curvas homotópicas nulas (denotadas por $\Omega(0)$) en $\Omega(p)$. Este grupo, en realidad se comporta mucho mejor pues, $Hol_p^0(M)$ resulta ser un subgrupo de Lie de $SO(T_pM)$, normal conexo que siempre es compacto y que coincide con el grupo de holonomía del cubrimiento universal de M.

Los grupos de holonomía de muchas variedades fueron clasificados por Berger [13], aquí se presentan algunas de sus propiedades:

Teorema 2.8 *Sea M una variedad riemanniana conexa, $p \in M$. $Hol_p(M)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $Hol_p(M) \subset SO(n)$ *si M es orientable.*
2. $Hol_p(\tilde{M}) = Hol_p^0(\tilde{M}) = Hol_p^0(M)$, *donde $\tilde{M}$ es el* cubrimiento universal *de M.*
3. $Hol_p(M)$ *es conjugado con* $Hol_q(M)$ *vía el transporte paralelo a lo largo de cualquier curva de p a q.*
4. $Hol_{p,q}(M \times N) = Hol_p(M) \times Hol_q(N)$

Proposición 2.17 *Sea M una variedad riemanniana conexa, entonces todos los grupos de holonomía restrictos son congruentes entre si.*

Demostración: Ver [7].
Así que, si M es una variedad riemanniana simplemente conexa y compacta, entonces el grupo de holonomía es un grupo de Lie conexo y está completamente determinado por su álgebra de Lie lo que hace que también sea compacto (para ver detalles de este hecho, consulte [13] capítulo 8).
Además; por la proposición anterior, los grupos de holonomía en diferentes puntos son todos conjugados por el transporte paralelo a lo largo de cualquier curva. Por tanto en una variedad riemanniana, se habla de grupo de holonomía $Hol(M)$ y grupo de holonomía restricto denotado por $Hol^0(M)$ sin hacer mención al punto.
Para evitar tecnicidades, se asumirá que las variedades siempre seran simplemente conexas, asi que las nociones coinciden. En el siguiente capítulo, se verá que la representación del grupo de holonomía restricto de M sobre T_pM es un producto de representaciones irreducibles con una *trivial*. Este producto es único salvo el orden. Cada uno de los factores no triviales es, o una representación ortogonal de un grupo de Lie compacto conexo que actúa transitivamente sobre la esfera unitaria o la representación isotrópica de un espacio simétrico riemanniano simple de rango 2 [11].

Ahora, el objetivo es definir los mismos conceptos anteriores pero utilizando la conexión normal.
El tranporte paralelo que interesa en la geometría de subvariedades del espacio euclídeo, no es el de vectores tangentes sino el de vectores normales. Si $c(t)$ es una curva sobre una variedad M y $\xi(t)$ es un campo de vectores normales a M definido a lo largo de $c(t)$, entonces como ya se vió en la sección 1.3, $\frac{D^\perp}{dt}\xi(t) = \frac{d}{dt}\xi(t)$ así que de manera análoga a la derivada covariante (tangencial), el campo normal $\xi(t)$ se llama **paralelo** cuando su derivada covariante normal es nula (i.e. $\frac{D^\perp}{dt}\xi(t) = 0$), y el transporte paralelo en la conexión normal es una aplicación:

$$\tau_c^\perp : \nu_p(M) \to \nu_q(M)$$

que de nuevo resulta ser una isometría lineal entre los espacios normales a $p = c(0)$ y a $q = c(1)$ y no depende de la curva dada.

Sea $p \in M$ y $c(t)$ una curva sobre M. $c \circ c'$ denota la composición de las curvas $c(t)$ y $c'(t)$ definida como $(c \circ c')(t) = c(2t)$ con $0 < t < \frac{1}{2}$ y $(c \circ c')(t) = c'(2t-1)$ para $\frac{1}{2} < t < 1$.
Entonces se tiene la aplicación:

$$\tau^{\perp} : \Omega(p) \to O(\nu_p(M)) \quad \textit{definida por} \quad \tau^{\perp}(c) = \tau_c^{\perp}$$

que satisface $\tau^{\perp}_{c \circ c'} = \tau^{\perp}_{c'} \tau^{\perp}_{c}$ y $\tau^{\perp}_{\tilde{c}} = (\tau^{\perp}_{c})^{-1}$ donde $\tilde{c} : [0,1] \to M$ está definida por $\tilde{c}(t) = c(1-t)$.
La imagen $\tau^{\perp}(\Omega(p))$ es un subgrupo de $O(\nu_p(M))$, llamado *grupo de holonomía normal* de M en p. Más precisamente se tiene:

Definición 2.46 *Si $p \in M$, el* ***grupo de holonomía normal*** *denotado por $\Phi_p^{\perp}(M)$ en p se define como:*

$$\Phi_p^{\perp}(M) = \left\{ \tau_c^{\perp} : \ c \textit{ es una curva cerrada en } M \textit{ por } p \right\}.$$

Como en el caso de la holonomía riemanniana, si M es conexa los grupos de holonomía normal en distintos puntos, son todos conjugados mediante el transporte paralelo (normal) a lo largo de cualquier curva $c(t)$ sobre M.
Si $c(t)$ es una curva diferenciable desde p a q, entonces:

$$\Phi_q(M) = \tau_c \Phi_p(M) (\tau_c)^{-1}$$

por tal razón, ya no se hace referencia al punto y solo se escribe $\Phi(M)$.
Cuando se cambia el conjunto $\Omega(M)$ por el conjunto $\Omega^0(M)$ de lazos homotópicos diferenciables en M basados en p, el subgrupo resultante de $O(\nu_p(M))$ es el denominado *grupo de holonomía normal restricto* de M en p y se denota por $\Phi_p^0(M)$ que resulta ser un subgrupo normal de $\Phi_p(M)$ [2].

Teorema 2.9 *Si M es una variedad riemanniana, el grupo de holonomía normal restricto $\Phi_p^0(M)$ es un subgrupo arcoconexo de $O(\nu_p(M))$.*

Demostración: Puede encontrarse en [7] en el teorema 4.2 del capítulo 2.

Como consecuencia de un resultado de Yamabe, que establece que cada subgrupo arcoconexo de un grupo de Lie es un subgrupo de Lie, se tiene que el grupo de holonomía normal es un subgrupo de Lie del grupo ortogonal $O(\nu_p(M))$. Más aún, $\Phi_p^0(M)$ es un subgrupo de Lie de $O(\nu_p(M))$ (ver [7] pág. 275), esto implica que $\Phi_p^0(M)$ es la componente identidad $\Phi_p(M)$.
En particular, $\Phi_p(M)$ y $\Phi_p^0(M)$ tienen la misma álgebra de Lie que se denomina **álgebra de holonomía normal de** M **en** p. Por supuesto si M es simplemente conexa, entonces $\Phi_p^0(M) = \Phi_p(M)$.
El grupo de holonomía normal siempre será considerado como un subgrupo de Lie del grupo ortogonal $O(\nu_p(M))$, asi que $\Phi_p(M)$ actuará en forma natural sobre $\nu_p(M)$.
Un hecho importante que se tiene es que las propiedades del grupo de holonomía también se mantienen cuando se trabaja en el espacio normal del grupo de holonomía restricto normal de cualquier subvariedad de un espacio con curvatura constante como se verá en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El Teorema de Holonomía de Berger

La geometría riemanniana tuvo un gran avance hacia 1950 cuando Marcel Berger y George De Rham retomaron los trabajos de Cartan sobre espacios simétricos, obteniendo una clasificación más global de estos. Ellos realizaron una interesante conexión entre espacios simétricos y holonomía a través de la clasificación de los grupos de holonomía (hecha por Berger) obteniendo dos resultados importantes relacionados con el grupo de holonomía restricto de una variedad riemanniana, el *Teorema de descomposición de De Rham* y el *Teorema de Holonomía de Berger* (cuya demostración aparece en este capítulo); ambos teoremas tienen versiones locales y globales. Aquí se trabajará con la versión local. En estos trabajos se muestra, que casi todos los grupos de holonomía aparecen en espacios simétricos, dando una buena aproximación geométrica para estos interesantes grupos.
En este capítulo se trabajará la demostración del Teorema de Berger, apoyándose en la hecha por Olmos [10].

3.1. Teoremas Previos

En este sección se enunciaran algunos resultados importantes y recientes de la geometría de subvariedades que serán referenciados en los lemas que servirán de ayuda para la demostración del Teorema de Berger. Estos teoremas serán presentados sin demostración y hacen parte de los estudios recientes de matemáticos como Olmos, Di Scala, Console, Thorbergsson y Heintze, entre otros; que se han interesado en el estudio de la geometría de subvariedades desde el punto de vista holonómico.

Lema 3.1 *Sea G un subgrupo de Lie conexo de $SO(n)$ actuando sobre $\mathbb{R}^n$ como una s-representación y sea $N_0(G)$ la componente conexa del normalizador de G en $SO(n)$; entonces, $N_0(G) = G$.*

Reseña de la demostración: En un espacio simétrico irreducible X, la representación holonómica e isotrópica, coinciden. Más aún, holonomía local y global coinciden también. Para más detalles de esta prueba puede consultar [2] en la pág. 192 ■.

En el teorema 2.8 se vió que se puede estudiar cómo se descompone una variedad riemanniana a partir de su grupo de holonomía, note que en la parte 4 del teorema se observa que el producto cartesiano se refleja en una estructura producto a nivel de holonomía y la parte 3 muestra que si la holonomía se descompone en un punto, se descompone en todos.
Considere la acción de Hol^0_p sobre T_pM. Si $E \subset T_pM$ es un subespacio invariante (i.e. $Hol^0_p(E) \subset E$), entonces el complemento ortogonal también se preserva; es decir, $Hol^0_p(E^{\perp}) \subset E^{\perp}$. Así, como $Hol^0_p(M)$ es compacto, T_pM se descompone en subespacios invariantes irreducibles $T_pM = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$. Este hecho, inspiró a de Rham para enunciar el teorema algebraico que se enuncia a continuación.

Teorema 3.1 *(**algebraico de Berger-Rham**) Sean M una variedad riemanniana conexa y $p \in M$. Para cada p existe una única (salvo el orden) descomposición ortogonal de T_pM como $T_p(M) = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$ en $Hol^0_p(M)$-subespacios invariantes $V_0, \cdots, V_k$ y subgrupos normales $G_0, \cdots, G_k$ de $Hol^0_p(M)$ tales que:*

1. *$Hol^0_p(M) = G_0 \otimes \cdots \otimes G_k$.*
2. *G_i actúa trivialmente sobre V_j si $i \neq j$.*
3. *$G_0 = \{1\}$ y si $i \geq 1$, G_i actúa transitivamente sobre la esfera unitaria en T_pM o actúa irreduciblemente sobre V_i como la representación isotrópica de un espacio simétrico simple riemanniano.*

Puede suceder que $V_0 = T_pM$ en ese caso $M = \mathbb{R}^n$ o puede suceder también que $V_0 = \{0\}$ y ese caso M es la esfera S^n, $n > 1$. La descomposición dada en el teorema es única salvo el orden.
Así que, la reducibilidad de una variedad riemanniana conexa también se puede leer de la reducibilidad de la acción de su grupo de holonomía en T_pM entonces se tiene la siguiente definición:

Definición 3.1 *Sea M una variedad riemanniana y E un subespacio de T_pM, $p \in M$. M se dice **irreducible** o **simple** si su grupo de holonomía $Hol(M)$ es irreducible como grupo actuando sobre T_pM; es decir, si su grupo de holonomía no tiene subespacios invariantes por la holonomía (i.e. $Hol_p(E) \subset E$ para todo $E \subset T_pM$) [10].*

Observación 3.1: Cuando se dice que M es localmente irreducible también se refiere a que M localmente no es un producto directo con la métrica producto; en otras palabras, la variedad M no es de la forma $M = M_1 \times M_2$ donde M_1, M_2 son otras variedades riemannianas.

Definición 3.2 *Una variedad riemanniana se dice **localmente reducible** si para cada punto $p \in M$, existe una vecindad abierta $U \in M$ que es isométrica al producto riemanniano de al menos dos variedades riemannianas de dimensión mayor o igual a 1; en otro caso se dice que M es **localmente irreducible** [13].*

Gracias a este teorema y los trabajos de Berger, se puede dar una lista completa de posibles grupos de holonomía. El Teorema de Berger-Rham más conocido como Teorema de descomposición de De Rham, asegura que una variedad riemanniana M es localmente irreducible alrededor de p si y solo si el grupo de holonomía local actúa irreduciblemente sobre T_pM. Más precisamente enuncia que:

Teorema 3.2 *(**de Descomposición de De Rham**) Sea M una variedad riemanniana conexa, simplemente conexa y completa, si existe un subespacio propio de T_pM el cual es invariante (por la izquierda) bajo la acción del grupo de holonomía; entonces, M es localmente un producto de variedades riemannianas.*

Demostración: La prueba de este conocido teorema aparece en [7] en IV,6

Definición 3.3 *Sea M una variedad riemanniana localmente irreducible (en $p \in M$). El grupo de holonomía restricto $Hol_p^0(M)$ se llama **no excepcional** si existe un espacio simétrico con el mismo grupo de holonomía.*

Teorema 3.3 *(Berger) Sea M una variedad riemanniana irreducible simplemente conexa que no es isomorfa a un espacio simétrico. Entonces el grupo de holonomía $Hol(M)$ de M pertenece a la siguiente lista:*

$Hol(M)$	métrica	dimensión de M
$SO(n)$	n	genérica
$U(n)$	$2n$	Kähler
$SU(n)$	$2n\,(n \leq 3)$	Calabi-Yau

Cuadro 3.1: Clasificación de grupos de holonomía

Cabe aclarar que la lista es más larga, aquí se presentan únicamente los casos que de alguna manera se han mencionado a lo largo del trabajo.

Definición 3.4 *Una subvariedad de un espacio euclídeo se denomina **llena** (o **full**) si no está contenida en ningún subespacio afín propio del espacio ambiente [2].*

Olmos observó una propiedad importante al trabajar con grupos de holonomía de una variedad riemanniana: el álgebra de holonomía es generada por tensores de curvatura (algebraicos) que satisfacen las identidades algebraicas de un tensor de curvatura [11]. También Notó un importante hecho sobre los grupos de holonomía: el álgebra de holonomía está relacionada con el tensor de curvatura. Su demostración puede consultarse en [2] en la pág. 104.

Teorema 3.4 *Sea M una variedad riemanniana con haz normal plano (i.e. $R^{\perp} = 0$), entonces cualquier vector normal tiene el mismo $\nabla^{\perp}$-transporte paralelo a lo largo de curvas homotópicas.*

El resultado anterior implica que si $R^{\perp} = 0$ entonces el grupo de holonomía normal restricto Φ_p^0 es trivial, o lo que es equivalente a decir que el álgebra de holonomía denotada por $\mathfrak{g}$ es trivial. De esta manera, se presenta el siguiente teorema:

Teorema 3.5 ***(de holonomía de Ambrose-Singer)*** *Sea M una subvariedad conexa de un espacio forma $\overline{M}$. El álgebra de holonomía normal $\mathcal{G}$ es la subálgebra de $\mathtt{so}\nu_p(M)$ generada por los endomorfismos:*

$$\tau_\gamma^{\perp -1} R^{\perp}(X, Y) \tau_\gamma^{\perp}$$

donde $\tau_\gamma^{\perp}$ es el $\nabla^{\perp}$-transporte paralelo sobre M a lo largo de una curva diferenciable $c : [0, 1] \to M$ que comienza desde p y $X, Y \in T_{\gamma(1)}M$.

En otras palabras, el álgebra de holonomía normal $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie que coincide con el span lineal de los endormorfismos antisimétricos de la familia $\mathcal{R}$ de tensores de curvatura algebraicos $R^{\perp}$.
Así que, el teorema de Ambrose-Singer implica que el álgebra de Lie de $\Phi_p(M)$ está generada por endomorfismos de la forma:

$$\gamma^{\perp}(R)(X, Y) = (\tau_\gamma^{\perp})^{-1} R^{\perp}(\tau_\gamma X, \tau_\gamma Y) \tau_\gamma^{\perp}$$

donde $X, Y \in T_pM$, $\gamma : [0, 1] \to M$ es una curva diferenciable que comienza en p y τ_γ denota el transporte paralelo tangencial sobre M a lo largo de γ.

Para la conexión normal de una subvariedad de un espacio forma, el Teorema algebraico de Berger-Rham tiene una versión más simple:

Teorema 3.6 ***(de Holonomía Normal)*** *Sea M una subvariedad conexa de una variedad riemanniana $\overline{M}$ de curvatura constante. Sean $p \in M$ y $\Phi_0^{\perp}(M)$ el grupo de holonomía normal restricto en p. Entonces $\Phi_0^{\perp}(M)$ es compacto, existe una única (salvo el orden) descomposición ortogonal del espacio normal en p, $\nu_p(M) = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$ en $\Phi_0^{\perp}(M)$-subespacios invariantes, y existen $\Phi_0(M) \cdots \Phi_k(M)$ subgrupos normales de $\Phi_0^{\perp}(M)$ tales que:*

1. $\Phi_0^{\perp}(M) = \Phi_0(M) \otimes \cdots \otimes \Phi_k(M)$.
2. *$\Phi_i(M)$ actúa trivialmente sobre V_j si $i \neq j$.*
3. *$\Phi_0(M) = \{1\}$ y si $i \geq 1$, $\Phi_i(M)$ actúa irreduciblemente sobre V_i como la representación isotrópica de un espacio simétrico irreducible riemanniano.*

La demostración de este resultado aparece en [11] o consultar [2] pág. 108.
En otras palabras, el Teorema de holonomía normal establece que dado un punto p sobre una subvariedad sea M de un espacio euclidiano, existe una variedad riemanniana $\overline{M}$ tal que la holonomía normal restricta de M coincide con la holonomía riemanniana de $\overline{M}$. Es decir, para $p \in N$ y $q \in M$, existe una isometría lineal $h : T_pN \to \nu_q(M)$ con

$$\Phi_q^{\perp} = h \Phi_p h^{-1}$$

El teorema anterior también dice que no existen espacios simétricos que sean una holonomía de una variedad simplemente conexa.
Este teorema no a priori esperable, pues la forma particular que tiene la holonomía riemanniana depende fuertemente de la primera identidad de Bianchi del tensor de curvatura riemanniano. Este identidad no es satisfecha por el tensor de curvatura normal (pues, tiene variables tangentes y normales). Esto se soluciona definiendo otro tensor en el espacio normal (ver [11]). Una interesante aplicación de este teorema se tiene con el Teorema de holonomía Berger (sección 3.2)
A continuación se enuncian dos teoremas sin demostración (éstas pueden ser consultadas en [2] capítulo 6)

Teorema 3.7 *Sea G un grupo de Lie. G actúa irreduciblemente sobre el espacio euclídeo si y solo si cualquier órbita $G.v$, $v \neq 0$, es una subvariedad llena del espacio euclídeo.*

Teorema 3.8 *Sean G un grupo ortogonal del espacio euclídeo y $G.v$ una órbita llena. Entonces la imagen bajo la representación slice conexa de $(G_v)_0$ está contenida en el grupo de holonomía normal en v.*

Lema 3.2 ***(de Gluing)*** *Sea M una variedad riemanniana, sean $p \in M$ y ρ el radio inyectividad en p. Suponga que para cualquier v en algún subconjunto denso Ω de la bola euclídea $B^E(\rho, 0)$, la familia $\mathcal{F}_v$ spans T_pM. Entonces, la simetría geodésica s_p en p es una isometría de la bola geodésica $B(\rho, p)$ de M.*

Demostración: Si N es un espacio localmente simétrico, su tensor de curvatura se anula y su operador de Jacobi $R(., \gamma'(t))\gamma'(t)$ se diagonaliza con coeficientes constantes en un marco paralelo a lo largo de la geodésica $\gamma(t)$. Entonces, de las hipótesis; para $v \in \Omega$, el operador de Jacobi de M a lo largo de la geodésica $\gamma_v(t)$ se diagonaliza con coeficientes constantes en un marco paralelo. Así; se puede resolver explícitamente, en un marco paralelo, la ecuación de Jacobi para probar que $d(s_p)_{(\gamma_v(1))}$ es una isometría y teniendo en cuenta la densidad de Ω, se completa la demostración. ■

3.2. Prueba del Teorema de Holonomía de Berger

El estudio de las subvariedades a partir de su grupo de holonomía ha permitido recientemente encontrar características importantes de su geometría, tal como lo demuestra el Teorema de holonomía normal, el cual involucra construcciones geométricas recientes y que tiene una aplicación especial que en este trabajo a través del Teorema de holonomía de Berger, el teorema principal de este trabajo.

A partir del Teorema de Berger, la holonomía de un espacio irreducible que no es simétrico, es siempre transitiva (en la esfera). Esto no implica que no haya espacios

simétricos irreducibles con holonomía transitiva (los que tienen esta propiedad son los espacios simétricos de rango 1). Como ya se ha ido mencionando, el Teorema de Berger se obtiene luego de largos resultados clasificatorios de Marcel Berger a mediados del siglo pasado. Él observó que asociado a un grupo de holonomía irreducible $Hol(M)$ que actúa en T_pM se tienen dos tensores algebraicos, la curvatura R y su derivada covariante ∇R en p. Ambos tensores satisfacen la primera y segunda identidad de Bianchi y se relacionan con $Hol(M)$ por el hecho que toman valores en su álgebra de Lie (por el Teorema de Ambrose-Singer).
Usando la clasificación de representaciones irreducibles de grupos compactos Berger llega a que solo algunos de los grupos transitivos en la esfera admiten un tensor algebraico no nulo del tipo ∇R. Años más tarde James Simons dió una prueba puramente algebraica de este hecho que elude la clasificación, pero muy intrincada y técnica [12].

El problema de tener una prueba conceptual y geométrica del teorema de holonomía quedó abierto. En esta sección, se presenta la prueba dada por Carlos Olmos que vincula la holonomía riemanniana con la holonomía normal.
La idea de la demostración (tal como la describe Olmos) es la siguiente:
Sea $Hol_p^0(M)$ el grupo de holonomía restricto en p de una variedad riemanniana M. Entonces,

1. El espacio normal $\nu_v(Hol_p^0(M).v) \subset T_pM$, a cualquier órbita del grupo de holonomía $Hol_p^0(M)$, es a través de la exponencial exp_p cerca del origen una subvariedad totalmente geodésica de M (que se denotará por N^v). Esto es consecuencia de la identidad de Bianchi (proposición 1.8), el Teorema de Ambrose-Singer (teorema 3.5) y un resultado de Cartan sobre la existencia de subvariedades totalmente geodésicas (teorema 2.7). Además la geodésica γ_v es un factor plano de N^v.

2. El grupo de holonomía normal $\Phi^\perp(M)$ de la subvariedad $Hol_p^0(M).v$ actúa por isometrías en N^v. En efecto, cualquier curva $c(t)$ en $Hol_p^0(M).v$ induce, vía el transporte paralelo normal, una variación perpendicular de subvariedades totalmente geodésicas $N^{c(t)}$ de M. Una tal variación es siempre por isometrías. Tomando curvas cerradas por v, se obtiene el resultado deseado. Más aún, el grupo de holonomía normal debe contener a la componente conexa del subgrupo de isotropía $Hol_v(M)$ en v, representado en el espacio normal. Pero la isotropía debe contener a la holonomía de N^v, ya que v es fijado por esta holonomía. Esto implica que $\Phi^\perp(M)$ contiene a la holonomía de N^v. A partir de esto no es difícil ver que N^v es localmente simétrico (ya que la isotropía de la variedad riemanniana N^v contiene a la holonomía).

3. Si $Hol_p^0(M)$ no es transitivo, entonces cualquier vector principal para la acción de $Hol_p^0(M)$ está contenido en una familia de espacios normales a órbitas no triviales de $Hol_p^0(M)$. Más aún, esta familia genera T_pM (esto es un hecho general para acciones irreducibles de grupos de isometrías lineales).

4. Se tiene finalmente, que para casi todo v la geodésica γ_v está localmente contenida en una familia de subvariedades totalmente geodésicas que son (intrínsicamente) localmente simétricas y cuyos espacios tangentes generan T_pM. Esto implica que el operador de Jacobi J se diagonaliza, con coeficientes constantes en una base paralela a lo largo de γ_v. Luego M es localmente simétrica en p.

Esto completa la idea de la demostración del Teorema de holonomía de Berger [12].

Teorema 3.9 ***de Berger-Simons***: *Sea M localmente irreducible. Si el grupo de holonomía ϕ de M actúa transitivamente sobre la esfera (del tangente), entonces el espacio es localmente simétrico.*

El Teorema de Berger dicho de manera más simple plantea que: *La variedad M es localmente simétrica pues existen muchas subvariedades totalmente geodésicas y simétricas no triviales (es decir, de dimensión mayor que uno y menor a la dimensión de M)*[12].

Observación 3.2: El hecho de que existan muchas subvariedades totalmente geodésicas es muy inusual, generalmente las únicas subvariedades totalmente geodésicas son los puntos, las geodésicas y el espacio ambiente.

Cabe destacar que, algunos de los resultados usados para la demostración del Teorema de Berger no son fáciles de obtener. Sin embargo, tratando de no perder de vista el objetivo, se presentaran de la manera más sencilla posible.
Para tal efecto, se enunciarán los lemas y unos resultados previos que serán parte de la demostración del teorema.

Lema 3.3 *Sea G un subgrupo de Lie compacto de $SO(n)$. Si $\xi \in \nu_v(G.v)$; entonces, $v \in \nu_{v+\xi}(G.(v+\xi))$*

Demostración: Note que cualquier ξ en $\nu_v(G.v)$ es perpendicular a todo elemento de $T_v(G.v)$, es decir $\{0\} = \langle T_v(G.v), v+\xi\rangle$.
Por otra parte,

$$\langle T_v(G.v), v+\xi\rangle = \langle \mathfrak{g}.v, v+\xi\rangle = -\langle v, \mathfrak{g}.(v+\xi)\rangle = \langle v, T_{v+\xi}(G(v+\xi))\rangle \; \blacksquare.$$

Lema 3.4 *Sea G un grupo de Lie compacto de $SO(n)$ que no es transitivo en la esfera y sea v un vector principal. Entonces existe $\xi \in \nu_v(G.v)$ (ξ no es múltiplo de v) tal que la familia de espacios normales $\nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$ span todo $\mathbb{R}^n$, donde $\gamma(t) = v + t\xi$, $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $\xi \in \nu_v(G.v)$ tal que ξ no es múltiplo de v. Como $G.v$ es una órbita principal, cualquier ξ se extiende a un campo normal G-invariante (denotado por $\tilde{\xi}$). Puesto que el operador de forma $A_v = -Id$, entonces al sumar a ξ un múltiplo de v, $\det(A_\xi) \neq 0$.
Sea $\gamma(t) = v + t\xi$ y sea $\mathbb{V}$ el complemento ortogonal del *span* de la familia $\nu_{v(t)}(G.\gamma(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Se quiere mostrar que $\mathbb{V} = \{0\}$.
Por construcción, $\mathbb{V}$ está contenido en cualquier espacio tangente $T_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$.

Sea X perteneciente al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G tal que $X.v \in \mathbb{V}$; entonces, el campo Killing $q \to X.q$ es un campo Jacobi cuando se restringe a la geodésica γ que será denotado por $J_\xi(t)$. Es un hecho estándar que $J_\xi(t)$ tiene condiciones iniciales $J_\xi(0) = X.v$, $J'_\xi(0) = \nabla^\perp_{X.v}\tilde{\xi} - A_\xi(X.v)$ donde A denota el operador de forma de $G.v$
Así, si $w = J'_\xi(0)$; entonces, $J_\xi(t) = X.v + tw$ (recuerde que en $\mathbb{R}^n$ los campos de Jacobi son de la forma $u + tw$). Como $J_\xi(t)$ es tangente a la órbita $G.\gamma(t)$, se obtiene que $w \perp \nu_{\gamma(t)}(G.\gamma(t))$ para $t \neq 0$. Pero, para un t pequeño, $\gamma(t)$ es un vector principal para la G-acción y así, los espacios normales a las órbitas asociadas convergen a $\nu_v(G.v)$; entonces, también $w \perp \nu_v(G.v)$ y por tanto, $w \in \mathbb{V}$.
Como $J_\xi(t)$ es un campo de Jacobi con las condiciones iniciales dadas y $X.v \in \mathbb{V}$ es arbitrario, se concluye que $\nabla^\perp_{\mathbb{V}}\tilde{\xi} = 0$ y $A_\xi(\mathbb{V}) \subset \mathbb{V}$.
Así, si $\mathbb{W} = \mathbb{V}^\perp \cap T_v(G.v)$ se tiene que $A_\xi(\mathbb{W}) \subset \mathbb{W}$. Sea $Y \in \mathcal{G}$ tal que $Y.v \in \mathbb{W}$; entonces el campo de Jacobi $\bar{J}_\xi(t)$ a lo largo de $\gamma(t)$ inducido por Y, tiene condiciones iniciales $\bar{J}_\xi(0) = Y.v$, $\bar{J}'_\xi(0) = \nabla^\perp_{Y.v}\tilde{\xi} - A_\xi(Y.v)$, ambos yacen en $\mathbb{V}^\perp$ entonces, $\bar{J}_\xi(t) \perp \mathbb{V}$.
Sean $X_1, X_2, ..., X_k \in \mathcal{G}$ tales que $X_1.v, ..., X_k.v$ una base ortonormal que diagonaliza la restricción a $\mathbb{V}$ de A_ξ; entonces, sus campos de Jacobi asociados son $J^i_\xi(t) = (1 - t\lambda_i)X_i.v$, donde $\lambda_i \neq 0$ es un valor propio de A_ξ asociado a $X_i.v$ $(i = 1, ..., k)$.
Sea $Z \in \mathcal{G}$ arbitrario definido por $Z = X + Y$ donde X es una combinación lineal de $X_1, X_2, ..., X_k$ y $Y.v \in \mathbb{W}$; de aquí que el campo de Jacobi inducido por Z a lo largo de γ en $t = \frac{1}{\lambda_i}$ es perpendicular a $X_i.v$, como Z es arbitrario, $X_i.v \in \nu_{\gamma(\frac{1}{\lambda_i})}(G.\gamma(\frac{1}{\lambda_i}))$ lo cual es una contradicción a menos que $\mathbb{V} = \{0\}$. ∎

Lema 3.5 *Sea M una variedad riemanniana con la propiedad que para cada p de M, cada transformación holonómica (restricta) de T_pM se extiende vía la aplicación exponencial a una isometría local. Entonces, M es localmente simétrica.*

La demostración del lema anterior aparece en [10].

Proposición 3.1 *Sean M una variedad riemanniana, $p \in M$ y sea ρ el radio de inyectividad en p. Suponga que el grupo de holonomía restricto $Hol^0_p(M)$ de M en p actúa irreduciblemente sobre T_pM. Sea $\nu_v(Hol^0_p(M).v)$ con $(v \in T_pM)$, el espacio normal en v de la órbita de holonomía $Hol^0_p(M).v$ en T_pM.*
Sea $N^v = exp(\nu_v(Hol^0_p(M).v) \cap B^E(\rho, 0))$, entonces para todo $v \in T_pM$, $v \neq 0$:

1. *N^v es una subvariedad totalmente geodésica de M. Además, N^v divide localmente, la geodésica γ_v y el grupo de holonomía $Hol^v(M)$ de N^v en p, está contenido en la imagen, bajo la representación slice del subgrupo isotrópico conexo $(Hol_v(M))_0$.*

2. *El grupo de holonomía normal $\Phi^\perp(M)$ de $Hol^0_p(M).v$ en v actúa por isometrías sobre N^v en la forma natural (i.e. cualquier $g \in \Phi^\perp(M)$ es la diferencial de una isometría de N^v que fija a p). Más aún, $\Phi^\perp(M)$ contiene al grupo de holonomía de $Hol^v(M)$ de N^v en p.*

3. *N^v es (intrínsicamente) localmente simétrica.*

Demostración:

1. Sea $\mathcal{R}$ la familia de tensores de curvatura riemannianos algebráicos en p, dados por el Teorema de Ambrose-Singer que genera el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $Hol_p^0(M)$. Entonces, $\xi \in \nu_v(Hol_p^0(M)\cdot v)$ si y solo si $\langle \mathcal{G}.v, \xi\rangle = 0$ lo que es equivalente a:

$$0 = \langle R^{\perp}(X,Y)v, \xi\rangle = \langle R^{\perp}(v,\xi)X, Y\rangle$$

para todo $X, Y \in T_pM$ y todo $R^{\perp} \in \mathcal{R}$. De aquí que, $R^{\perp}(v,\xi) = 0$, para todo $R^{\perp} \in \mathcal{R}$.
Sea $\eta \in \nu_v(Hol_p(M).v)$ y $R^{\perp} \in \mathcal{R}$. Entonces, por la identidad de Bianchi:

$$R^{\perp}(\xi,\eta)v = R^{\perp}(v,\eta)\xi + R^{\perp}(\xi,v)\eta = 0.$$

Así, $R^{\perp}(\xi,\eta)$ pertenece al álgebra isotrópica $\mathcal{G}_v$ y $R^{\perp}(\xi,\eta)\nu_v(Hol_p(M).v)$ está contenido en $\nu_v(Hol_p(M).v)$, entonces

$$R^{\perp}(\nu_v(Hol_p(M).v), \nu_v(Hol_p(M).v))\nu_v(Hol_p(M).v) \subset \nu_v(Hol_p(M).v)$$

para todo $R^{\perp} \in R$ Esta condición implica que las hipótesis del teorema de Cartan se satisfacen. Entonces, N^v es totalmente geodésica.
Para probar que N^v parte a la geodésica γ_v, se debe probar que v está fijo por el grupo de holonomía $Hol_p^v(M)$ de N^v en p. En efecto, sea $\mathcal{R}^v$ la subfamilia de $\mathcal{R}$ que se obtiene por el pull back en p del tensor de curvatura de M, pero solo usando curvas que están contenidas en N^v . Así, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $Hol_p^v(M)$ está dada por el span lineal de $R^{\perp}(\xi,\eta)|_{\nu_v(Hol_p(M).v)}$ donde $R^{\perp} \in \mathcal{R}^v$ y $\xi, \eta \in \nu_v(Hol_p(M).v) = T_pN^v$.
Pero, se ha mostrado que todos esos endomorfismos pertenecen al álgebra isotrópica en v. Por tanto, v está fijo por el grupo de holonomía $Hol_p(M)^v$. Más aún, se ha probado que el álgebra de Lie $\mathfrak{G}^v$ de $Hol_p^v(M)$ está contenido en la imagen, bajo la representación slice, del álgebra isotrópica $\mathcal{G}_v$ de $Hol_p(M)$ en v.

2. Sean $v \in T_pM$ y $c : [0,1] \to Hol_p(M).v$ con $c(0) = v$. Considere $\tau_t^{\perp}$ el transporte paralelo en la conexión normal a lo largo de la curva $c|_{[0,t]}$.
Entonces, $g_t : \nu_v(Hol_p(M).v) \cap B^E(\rho, 0) \to M$ definida por $g_t = exp_p \circ \tau_t^{\perp}$ es una familia uno-paramétrica de subvariedades totalmente geodésicas. Se debe probar que el campo variación $X_t = \frac{\partial}{\partial t} g_t$ siempre es perpendicular a la subvariedad $exp_p(\tau_t^{\perp}(\nu_v(Hol_p(M).v)) \cap B^E(\rho, 0))$.
Al reemplazar v por $c(t)$, será suficiente para mostrar esto en $t = 0$.
Sea $\xi \in \nu_v(Hol_p(M).v) \cap B^E(\rho,0)$; se tiene que $X_0(s\xi)$ es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica $r_{\xi}(s)$ de M, con condiciones iniciales 0 y $\frac{d}{dt}|_0 \tau_t^{\perp}(\xi) = -A_{\xi}c'(0)$ ambos perpendiculares al espacio tangente $T_pN^v = \nu_v(Hol_p(M).v)$ (donde A denota el operador de forma de $Hol_p(M).v$). Entonces, el campo Jacobi $X_0(s\xi)$ debe ser siempre perpendicular al espacio tangente de una subvariedad totalmente geodésica N^v. Ya que ξ es arbitrario, X_0 es siempre perpendicular a N^v. Así, por el lema 2.2, $g_t : N^v \to N^{c(t)}$ es una isometría. Al tomar lazos arbitrarios

en $Hol_p(M).v$ a través de v se obtiene que el grupo de holonomía normal actúa por isometrías sobre N^v.
Del teorema 3.8 y la parte 1 descrita anteriormente, se tiene que $Hol_p(M)^{\perp}$ contiene el grupo de holonomía $Hol_p(M)^v$ de N^v en p.

3. Sea $v \in T_pM$ y considere la subvariedad totalmente geodésica N^v. Sea c una curva en N^v, que comienza en p. Entonces, el transporte paralelo en M, τ_c a lo largo de c aplica el grupo de holonomía restricto $Hol_p^0(M) = Hol(M)$ de M en p en el grupo de holonomía $Hol_q^0(M).(\tau_c(v))$ (y así, este aplica espacios normales en espacios normales). Por tanto, $\tau_c : T_pN^v \to T_qN^{\tau_c(v)}$ está bien definida.
Ya que pr la parte 1, N^v es totalmente geodésica, se sigue que $T_qN^{\tau_c(v)} = T_qN^v$, así que $N^{\tau_c(v)}$ y N^v coinciden en una vecindad de q. Así, cada transformación holonómica de N^v en q se extiende, via la aplicación exponencial, a una isometría local. Entonces, por el Lema 3.5, N^v es localmente simétrica. ■

Teorema 3.10 ***(de Holonomía de Berger)*** *Sea M una variedad riemanniana irreducible tal que su grupo de holonomía actúa transitivamente en la esfera. Entonces M es localmente simétrica.*

Demostración: Sean $v \in T_pM$, ρ el radio inyectividad en p y suponga que el grupo de holonomía restricto $Hol_p^0(M)$ de M en p actúa irreduciblemente sobre T_pM.

1. El espacio normal $\nu_v(Hol_p^0(M).v) \subset T_pM$, a cualquier órbita de $Hol_p^0(M).v$ en T_pM, es a través de la exponencial exp_p cerca del origen, una subvariedad de M totalmente geodésica N^v (Teorema 2.7); donde $N^v = exp(\nu_v(Hol_p^0(M).v) \cap B^E(\rho, 0))$.

2. El grupo de holonomía normal $\Phi^{\perp}(M)$ de la subvariedad $Hol_p^0(M).v$ actúa por isometrías en N^v. Más aún, $\Phi^{\perp}(M)$ contiene al grupo de holonomía de N^v en p (Teorema de holonomía normal). Entonces, N^v es localmente simétrica.

3. Los vectores principales $\mathcal{O}$ de T_pM forman un conjunto abierto y denso de M [2].

4. Un resultado debido a Konstant dice que cualquier métrica riemanniana en la esfera S^n tiene holonomía $SO(n)$, entonces el grupo de holonomía Hol_p es no transitivo en la esfera.

5. Como $Hol_p^0(M)$ no es transitivo, entonces cualquier vector principal para la acción de $Hol_p^0(M)$ está contenido en una familia de espacios normales a órbitas no triviales de $Hol_p^0(M)$.

6. Existe una línea $\gamma_\xi(t) = v + t\xi$ en el espacio normal de $Hol_p(M).v$ en v que no pasa a través del origen, tal que los espacios normales de órbitas de $Hol_p(M)$ a través de puntos de γ_ξ contiene v y generan a T_pM. (lema 3.3)

7. Entonces al aplicar los pasos 1,2 y 3 y el Lema de Gluing se obtiene que M es localmente simétrica en p ■

Bibliografía

[1] BERGER, M. *Sur les groupes d'holonomie homogénes de variétés á conexion affine et des variétés riemanniennes.* Bull. Soc. Math. Fr. 1955; **283**: 279-330.

[2] BERNDT, J., CONSOLE, S., OLMOS, C. *Submanifolds and Holonomy.* CRC Press. Chapman and Hall Research Notes Series in Mathematics. 2004.

[3] BOOTHBY, W.M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* 2^a ed. Academic Press. 1986. 430p.

[4] CHEVALLEY. C. *Theory of Lie Groups.* Princenton. 1946.

[5] DO CARMO, M.P. *Riemannian Geometry.* Rio de Janeiro: IMPA. 2005. 3^a ed. 332p.

[6] HIRSCH, MOMS. *Differential Topology.* Springer-Verlag. 1976.

[7] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry I, II.* Interscience Publishers. 1963,1969

[8] LEE, J. *Riemannian Manifolds: An introduction to curvature.* Springer-Verlag. 1997.

[9] MYERS, S.B. and STEENROD, N. *The group of isometries of riemannian manifolds.* Ann. of Math. **76** (1939), 400-416p.

[10] OLMOS, C. *A geometric proof of the Berger Holonomy Theorem.* Ann. of Math, **161** (2005), 579-588p.

[11] OLMOS, C. *The normal holonomy group.* Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990); 813-818.

[12] OLMOS, C. *El transporte paralelo; un nexo entre las geometrías intrínseca y extrínseca.* Córdoba, Argentina. Universidad Nacional de Córdoba. FaMAF, 2005.

[13] PETERSEN, P. *Riemannian Geometry.* 2^a ed. Springer-Verlag. 2006. 397p.

[14] SIMONS, J. *On transitivity of holonomy sistems.* Ann. of Math. (2) **76** (1962), 213-234.

[15] SOLANILLA, L. *Geometría Diferencial de Superficies.* Universidad de Medellín. 2008